

Vom Normalschnitt zur Zahnradkontur und zur Hüllschnittkontur des Werkzeugs

Stand: Juli 2018

© Ingenieurbüro Dr. Tilman Hasse

Ingenieurbüro Dr. Tilman Hasse

Eibenweg 5 • 76337 Waldbronn • Telefon: 07243 / 572113 • FAX: 07243 / 572114

tilman.hasse@t-online.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	3
2	Evolvente und Zahnstange im Stirnschnitt.....	4
2.1	Die Evolvente.....	4
2.2	Evolvente, Zahnstange und eine Fundamenteigenschaft der Evolvente.....	5
3	Zusammenhang Zahnrad – Flankenpunkt und Zahnstangen – Flankenpunkt im Stirnschnitt.....	7
3.1	Grundsätzliche Konfiguration Zahnrad – Zahnstange und zur grundsätzlichen Vorgehensweise.....	7
3.2	Die mathematischen Beziehungen im Stirnschnitt.....	9
3.3	Beispiel: Flanke bestehend aus mehreren Evolvententeilen im Stirnschnitt.....	14
4	Das Schrägstirnrad mit virtuellen Zahnstangen.....	19
4.1	Die Schraubenlinie (Helix).....	19
4.2	Normalschnitt und Stirnschnitt der Zahnstange, zentrale Definition.....	22
5	Paarung des Zahnrad ZR mit einem Gegenrad (Werkzeug) ZR0.....	26
5.1	Grundlegende Zusammenhänge.....	26
5.2	Ein Beispiel für ein Gegenrad.....	30
6	Anhang I: Der rechte Winkel, der Satz des Pythagoras und sin, cos.....	33
7	Anhang II: Der 3 – Dimensionale Raum, kartesische Koordinaten und Bewegungsablauf.....	38
7.1	Über Koordinatensysteme.....	38
7.2	Drehung, Drehmatrix, Spiegelung.....	40
7.3	Starrer Bewegungsablauf.....	41
7.4	Koordinatentransformation.....	41

1 Einleitung

Die Zahnkonturen eines Werkkrads werden unter Angabe eines speziellen Wälzzyinders, dem sog. Teilzylinder, mit Hilfe eines Zahnstangenprofils im Normalschnitt einer virtuellen Zahnstange definiert. Meist besteht eine solche Zahnkontur im Stirnschnitt aus Teilen von Evolventen, die passend verbunden werden werden. Hier wird darüber hinaus die Möglichkeit beschrieben, eine Zahnkontur durch einen völlig beliebigen Normalschnitt einer virtuellen Zahnstange zu definieren und zu berechnen. Natürlich muss zu jedem Punkt der Normalschnittkontur auch die Tangente existieren und die Sinnhaftigkeit, z.B. Kollision betreffend, muss natürlich auch gewährleistet sein.

Damit ist auch die Umkehrung möglich, d.h., bei bekannter Zahnradkontur kann auch zu einem beliebigen Wälzzyinder die passende virtuelle Zahnstange berechnet werden.

Damit kann zu jedem zulässigen Wälzzyinder auch das passende Gegenrad berechnet werden, wobei hier auch speziell Schraubgetriebe zulässig sind und man so die passenden Hülschnittkonturen für Schneidräder, Fräser und Schleifschnecken bestimmen kann.

Abschnitt 2 behandelt speziell den Zusammenhang zwischen Evolvente und Zahnstange. Abschnitt 3 behandelt ausführlich die Situation im Stirnschnitt und in Abschnitt 4 werden die Überlegungen für die Schrägverzahnung erweitert. Schließlich wird in Abschnitt 5 auf die Berechnung einer Paarung mit einem Gegenrad, das natürlich auch berechnet wird, eingegangen.

2 Evolvente und Zahnstange im Stirnschnitt

2.1 Die Evolvente

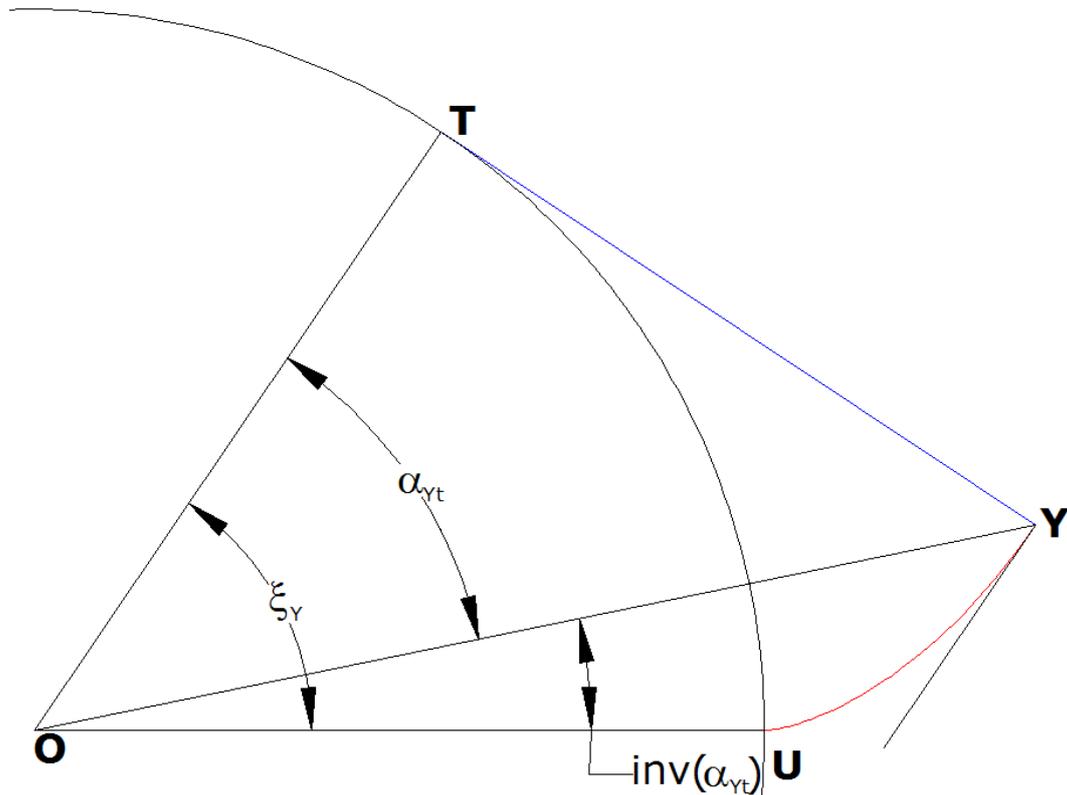


Bild 2.1: Evolvente (rot); O : Grundkreismittelpunkt = Drehpunkt der Radachse;

Abstand OU = Grundkreisradius $|r_b|$; ξ_Y : Wälzwinkel der Evolvente;

α_{Yt} : Stirneingriffswinkel; U : Evolventenursprungspunkt; Y : Punkt auf der Evolvente

Abstand YT : Krümmungsradius der Evolvente im Punkt Y = $\rho_Y =$ Wälzlänge L_Y

Wir betrachten hier Zahnräder, die sich um eine Achse drehen. Ein Schnitt senkrecht zur Achse heißt **Stirnschnitt**; Größen im Stirnschnitt werden mit dem **Index t** gekennzeichnet. Bild 2.1 zeigt eine Evolvente im Stirnschnitt. Der Evolventenursprungspunkt U liegt auf dem **Grundkreis mit dem Grundkreisradius r_b** .

Bezogen auf einen beliebigen Punkt Y auf der Evolvente erhalten wir die folgenden Zusammenhänge: Die Wälzlänge L_Y ist der vom Evolventenursprungspunkt U aus abgewinkelte Grundkreisbogen und es gilt daher:

$$L_Y = \xi_Y \cdot r_b \quad \frac{L_Y}{r_b} = \xi_Y = \tan(\alpha_{Yt}) \quad \text{inv}(\alpha_{Yt}) = \tan(\alpha_{Yt}) - \alpha_{Yt} = \xi_Y - \alpha_{Yt} \quad r_Y = \frac{r_b}{\cos(\alpha_{Yt})}$$

(2.1.1)

r_Y = ist der Abstand OY, also der Abstand des Punktes Y auf der Flanke zum Drehpunkt.

2.2 Evolvente, Zahnstange und eine Fundamenteigenschaft der Evolvente

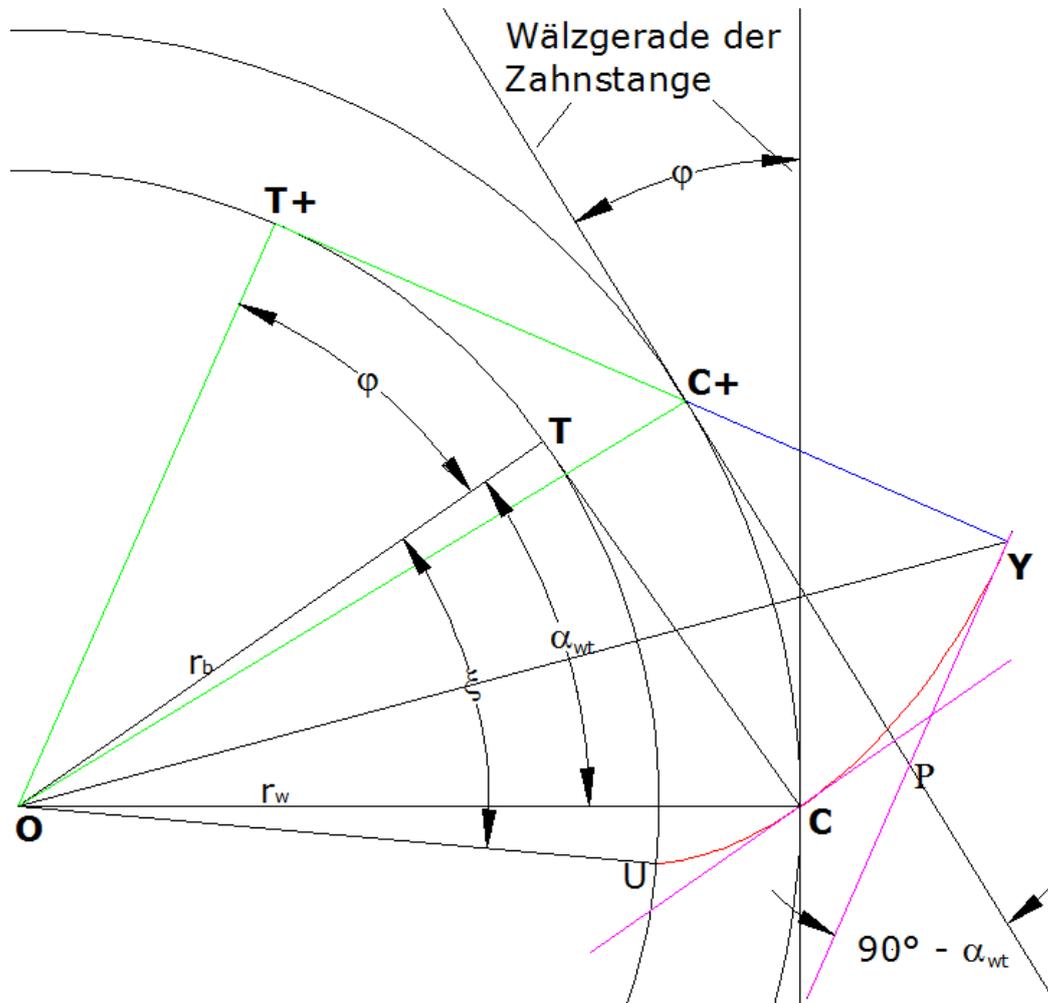


Bild 2.2: Abrollen der Wälzgeraden der Zahnstange auf dem Wälzkreis; **Evolvente rot**

In dem Bild 2.2 ist uns schon das Dreieck OCT aus Bild 2.1 (dort OYT) bekannt und natürlich der Evolventenursprungpunkt U. Wir haben damit die drei wichtigen Größen

- Grundkreis mit Radius $|r_b|$ = Abstand OT
- Wälzkreis mit Radius $|r_w|$ = Abstand OC
- Stirneingriffswinkel α_{wt} aus $r_b = r_w \cdot \cos(\alpha_{wt})$ (2.2.1)

Dazu definieren wir eine virtuelle Zahnstange:

- Wälzgerade : Tangente an den Wälzkreis im Punkt C

- Zahnstangenflanke : Tangente an die Evolvente (pink); die Zahnstangenflanke ist fest mit der Wälzgeraden verbunden!
- Wälzpunkt C : der aktuelle Berührungspunkt der Wälzgeraden mit dem Wälzkreis

Wälzkreis und Wälzgerade heißen aus historischen Gründen so; in Wirklichkeit handelt es sich um einen Rollkreis und eine Rollgerade; es wird also nicht gewälzt, sondern gerollt! Wir rollen nun die Wälzgerade auf dem Wälzkreis um den Winkel φ . Die Zahnstangenflanke, die ja mit der Wälzgeraden fest verbunden ist, schwenkt natürlich mit! Ebenso schwenkt das Dreieck OCT auf das Dreieck OC⁺T⁺. Wir bilden dann den Schnittpunkt der Geraden durch T⁺C⁺ mit der Geraden, die auf der geschwenkten Zahnflanke liegt und nennen den Schnittpunkt Y. Zwei Fragen interessieren nun:

- schneiden sich die beiden Geraden im rechten Winkel
- liegt der Schnittpunkt Y auf der Flanke

Beide Fragen können sofort mit ja beantwortet werden, denn in dem Dreieck PYC⁺ treten die Winkel α_{wt} und $90^\circ - \alpha_{wt}$ auf, womit bereits die erste Frage beantwortet ist. Da der neue Wälzwinkel $\xi^+ = \xi + \varphi$ ist, ergibt sich für den Abstand C⁺ bis zur Flanke der Wert $r_b \cdot \varphi$;

bezogen auf das Wälzen gilt andererseits: Abstand C⁺P = $r_w \cdot \varphi = \frac{r_b}{\cos(\alpha_{wt})} \cdot \varphi$. Damit und mit $C^+Y / C^+P = \cos(\alpha_{wt})$ ergibt sich über die Dreiecksbeziehung des Dreiecks PYC⁺ ebenfalls $r_b \cdot \varphi$ für den Abstand C⁺Y, womit auch die zweite Frage beantwortet ist.

Damit haben wir gezeigt, dass eine gerade Flanke einer Zahnstange auf der Evolvente abwälzen kann während die Wälzgerade auf dem Wälzkreis abrollt. Während dieses Vorganges wird die Evolvente als sogenannte Einhüllende durch die gerade Flanke erzeugt.

Der **Schnittpunkt der Evolvente mit dem Wälzkreis** hat eine besondere Bedeutung: Beim Abwälzen (Abrollen) erreicht man immer die Situation, bei der die folgenden vier Punkte zusammenfallen:

- Schnittpunkt der Evolvente mit dem Wälzkreis
- Wälzpunkt
- Berührungspunkt der Flanken (gerade Flanke – Evolvente)
- Schnittpunkt gerade Flanke mit der Wälzgeraden

In dieser Situation ist die Gleitgeschwindigkeit der Flanken zueinander Null. Sonst findet bei den Flanken immer **Wälzen statt, also Rollen mit Gleiten**.

Die Evolvente im Stirnschnitt ist also gegeben entweder durch Angabe des Grundkreisradius oder durch einen Wälzkreisradius r_w mit dem zugehörigen (Betriebs –) Eingriffswinkel α_{wt} (siehe 2.2.1).

3 Zusammenhang Zahnrad – Flankenpunkt und Zahnstangen – Flankenpunkt im Stirnschnitt

3.1 Grundsätzliche Konfiguration Zahnrad – Zahnstange und zur grundsätzlichen Vorgehensweise

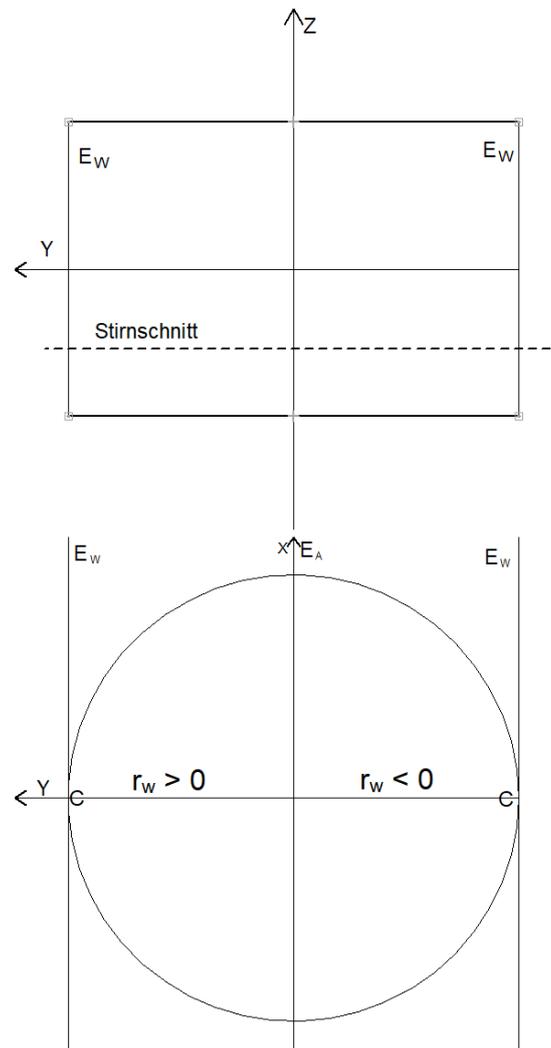


Bild 3.1.1 Allgemeine Konfiguration zum Abrollen eines Wälzylinders eines Zahnrads und einer Wälzebene E_w einer virtuellen Zahnstange ZS_{rw} , Radius $r_w > 0$ Außenverzahnung, Radius $r_w < 0$ Innenverzahnung

- Wir haben ein **Zahnrad ZR** mit der **Zähnezahl z**, das als Starrkörper aufgefasst wird, der sich um eine Achse drehen kann, wobei die Achsrichtung mit der z –

Achse übereinstimme. Aus Zähnezahl $z > 0$ folgt: **Außenverzahnung**, aus $z < 0$ folgt **Innenverzahnung**.

- Die Verzahnung wird durch einen speziellen Wälzzylinder mit dem Radius r , dem sogenannten Teilzylinder, und einer dazu passenden virtuellen Zahnstange $ZS\beta$ mit dem Schrägungswinkel β und der Stirnteilung $p_t = (2 \cdot \pi \cdot r) / z$ definiert. Die Zahnstange $ZS\beta$ hat eine Wälzebene, die auf dem Teilzylinder abrollt. Immer $p_t > 0$, daher r vorzeichenbehaftet.
- Mit Hilfe der virtuellen Zahnstange $ZS\beta$ wird die Zahnkontur des Zahnrads bestimmt, also gegeben: Zähnezahl z , Teilkreiszyylinder mit Radius r und $ZS\beta$; damit ergibt sich die Zahnkontur.
- Umgekehrt kann dann mit Hilfe der Zahnkontur zu einem beliebigen (im Rahmen des Vernünftigen natürlich) Wälzzylinder eine passende virtuelle Zahnstange bestimmt werden.

Die nun folgenden Formeln werden allgemein für einen Wälzzylinder mit Radius r_w mit der dazu passenden Zahnstange ZS_{rw} entwickelt, wobei $Zs\beta$ mit Teilkreisradius r eben ein Spezialfall ist. Wir haben dann die Konfiguration gemäß Bild 3.1.1:

- Wälzzylinder mit Radius r_w eines Zahnrads ZR mit Zähnezahl z
- Wälzebene E_w einer virtuellen Zahnstange ZS_{rw} mit Stirnteilung $p_{tw} = (2 \cdot \pi \cdot r_w) / z$
- Stirnebene in Höhe z

Als **globales Koordinatensystem**, das vom (Zeit –) Parameter t unabhängig ist, verwenden wir hier das übliche rechtshändige, kartesische Koordinatensystem mit

- der Standardbasis $B = \{\underline{e}_x = \underline{e}_0 = (1, 0, 0)^t, \underline{e}_y = \underline{e}_1 = (0, 1, 0)^t, \underline{e}_z = \underline{e}_2 = (0, 0, 1)^t\}$
- und dem Ursprung $P_{\text{Urspr}B} = (0, 0, 0)^t$ (3.1.1)

Damit haben wir für $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$:

$\underline{v} = v_0 \cdot \underline{e}_0 + v_1 \cdot \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2 = (v_0, v_1, v_2)^t = (v_x, v_y, v_z)^t = (\underline{v})$. Das hochgestellte t bedeutet: Transponiert; wir haben es also formal mit einer Matrix mit 3 Zeilen und einer Spalte zu tun, wobei sich (\underline{v}) eben auf die Standardbasis B bezieht.

Später benötigen wir für das Gegenrad ein weiteres globales Koordinatensystem, das also von dem (Zeit –) Parameter t unabhängig ist. Natürlich gibt es dazu auch Transformationsmatrizen.

Praktisch haben wir es im Folgenden mit einer zeitabhängigen Bewegung zu tun. Wir nehmen an, dass die Zuordnung $t \leftrightarrow \varphi(t)$ eineindeutig ist; daher können wir für eine rein geometrische Betrachtung den Drehwinkel φ des Zahnrads als Parameter verwenden.

Die aktuellen Basisvektoren des **Zahnrad – Koordinatensystems** sind die Vektoren $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2$:

- $(\underline{u}_0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^t, (\underline{u}_1) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)^t, (\underline{u}_2) = (0, 0, 1)$
- Mit $\underline{D}_{e_2}(\varphi) = \underline{U} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$, also $\det(\underline{U}) = +1$, ergeben sich
- die Transformationsmatrizen $\underline{T}_{BU} = \underline{U}^t$ und $\underline{T}_{UB} = \underline{U}$, also für $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$:
- $(\underline{v})_U = \underline{T}_{BU} \cdot (\underline{v})$ und $(\underline{v}) = \underline{T}_{UB} \cdot (\underline{v})_U$

- Der Ursprung des Zahnrad – Koordinatensystems sei mit dem des globalen Koordinatensystems identisch (3.1.2)

Die aktuellen Basisvektoren des **Zahnstangen – Koordinatensystems (Index ZK)** sind die Vektoren der Standardbasis $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$. Der Ursprung \underline{z}_u ist gegeben durch:

- $(\underline{z}_u(\varphi)) = (-\varphi \cdot r_w, r_w, 0)^t$; (3.1.3a)

Mit yz kann man **eine Verschiebung der Wälzebene zu einer Bezugsebene der Zahnstange** berücksichtigen. Die Koordinaten von Richtungen und Verschiebungen sind in beiden Koordinatensystemen gleich, nicht jedoch die Koordinaten von Punkten. Es gilt für einen Punkt \underline{P} :

- $(\underline{P}) = (\underline{P})_{ZK} + (\underline{z}_u(\varphi))$ (3.1.3b)

3.2 Die mathematischen Beziehungen im Stirnschnitt

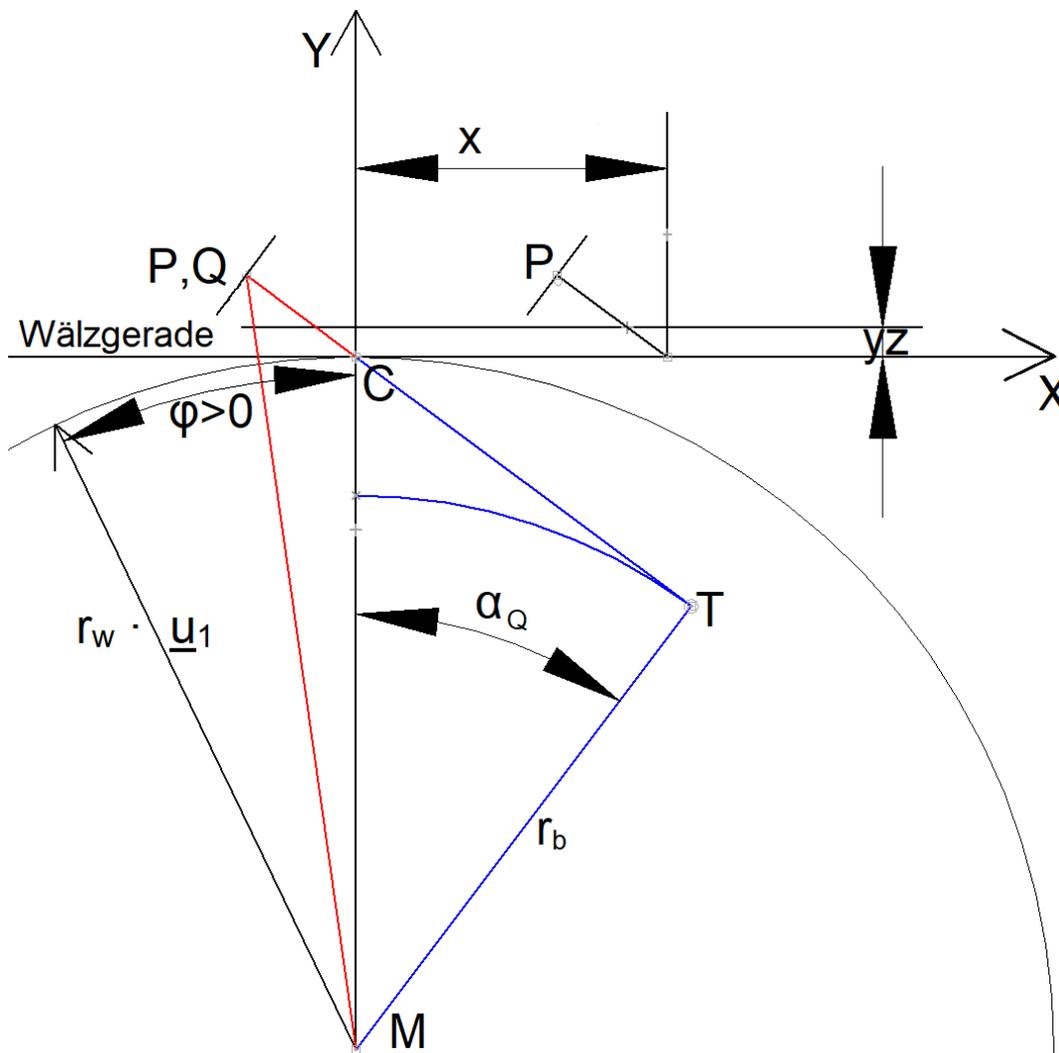


Bild 3.2.1 a): Außenverzahnung im Stirnschnitt: Erzeugung eines Punktes Q auf der Zahnradflanke aus Zahnstangenpunkt P bzw. umgekehrt: Erzeugung eines Punktes P auf der Zahnstangenflanke aus einem Flankenpunkt Q des Zahnrads. Die Wälzgerade liegt

auf der x – Achse und parallel dazu im Abstand yz befindet sich die Bezugslinie, C ist der Wälzpunkt und der Radius des Wälzkreises ist $r_w > 0$.

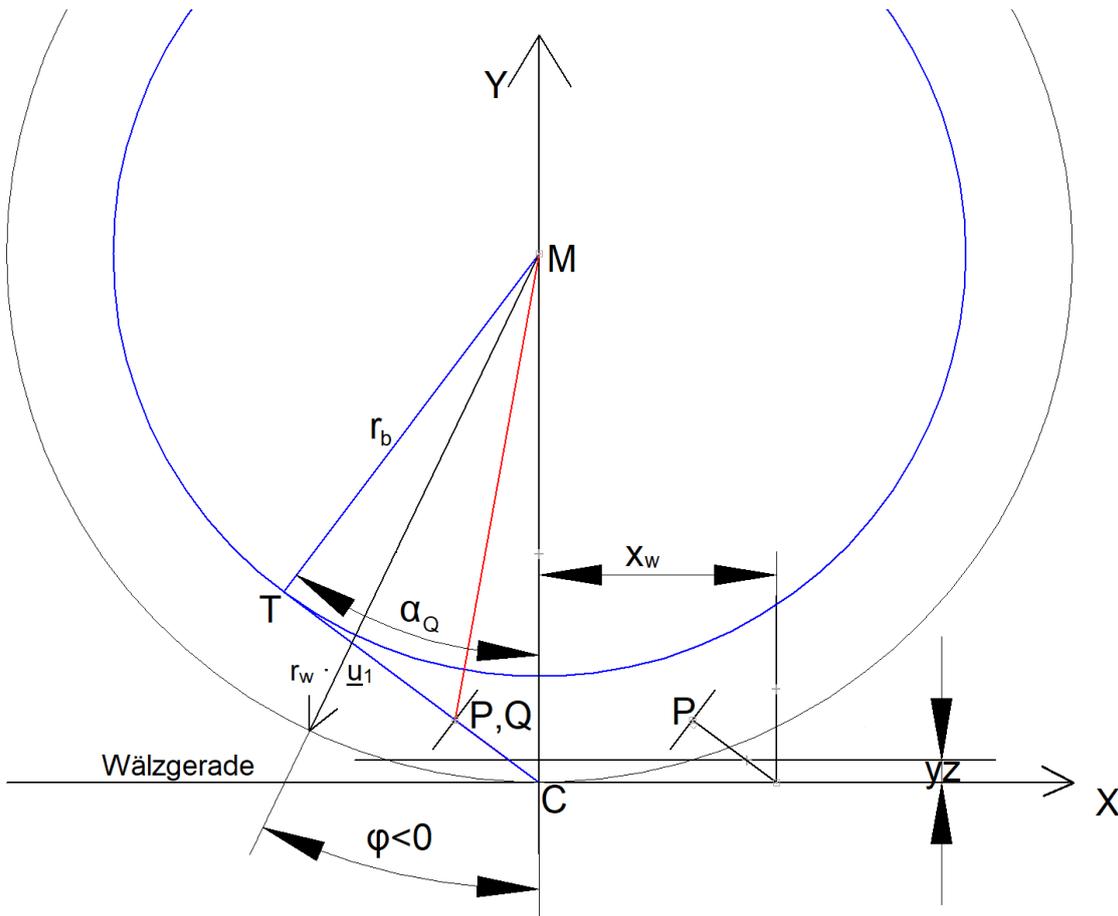


Bild 3.2.1 b): Innenverzahnung im Stirnschnitt: Erzeugung eines Punkts Q auf der Zahnradflanke aus Zahnstangenpunkt P bzw. umgekehrt: Erzeugung eines Punkts P auf der Zahnstangenflanke aus einem Flankenpunkt Q des Zahnrads. Die Wälzgerade liegt auf der x – Achse und parallel dazu im Abstand yz befindet sich die Bezugslinie, C ist der Wälzpunkt und der Radius des Wälzkreises ist $r_w < 0$.

Zunächst folgende Situation: **Die Zahnkontur der Zahnstange sei im Stirnschnitt punktwiese fest vorgegeben** und dazu der Wert yz . Gesucht ist die Kontur der Zahnradverzahnung, natürlich auch punktwiese.

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben verwenden wir den Drehwinkel φ als Parameter und verwenden die dort beschriebenen Koordinatensysteme. Die Stirnschnittebene habe die Position z , wobei z in diesem Kontext eine Konstante ist. Für den **Wälzkreismitelpunkt \underline{M}** und den **Wälzpunkt \underline{C}** erhält man also (siehe Bild 3.2.1):

- $(\underline{M})_U = (\underline{M}) = (0, 0, z)^t$
- $\underline{C} = (0, r_w, z)^t$ (3.2.1)

Für die Zahnstange erhält man im Stirnschnitt die Wälzlinie und Bezugslinie:

(a) Wälzlinie: $\underline{C} + a \cdot (\underline{e}_x)$, $a \in \mathbb{R}$

(b) Bezugslinie: $\underline{C} + (0, yz, 0)^t + a \cdot (\underline{e}_x)$, $a \in \mathbb{R}$ (3.2.2)

Nun definieren wir die grundsätzlichen Eigenschaften des Zahnstangenzahns im Stirnschnitt, wobei $\underline{P}(x) = (P_x(x), P_y(x), z)^t_{ZK}$ die (materiellen) Punkte der Zahnkontur seien (Index ZK wie Zahnstangenkoordinatensystem):

- (a) Aufteilung in einen negativen Teil (Index n) für $p_{nx} \leq x \leq 0$ und einen positiven Teil (Index p) für $0 \leq x \leq p_{px}$ mit $p_{wt} = p_{px} - p_{nx}$
- (b) Für $p_{nx} \leq x \leq 0$ haben wir: $P_x(x) = x$, $P_y(x)$ mit $P_y(x_1) \geq P_y(x_2)$ für $x_1 \leq x_2$
- (c) Für $0 \leq x \leq p_{px}$ haben wir: $P_x(x) = x$, $P_y(x)$ mit $P_y(x_1) \leq P_y(x_2)$ für $x_1 \leq x_2$
- (d) Dazu der Tangentenvektor $\underline{e}_{Pt}(x) = (e_{Ptx}(x), e_{Pty}(x), 0)^t$ mit $e_{Ptx}(x)^2 + e_{Pty}(x)^2 = 1$
- (e) Außerdem wird der Eingriffswinkel $\alpha_P(x) = \text{atan}(e_{Ptx}(x) / e_{Pty}(x))$ definiert, hier vorzeichenbehaftet!! (3.2.3)a

Der Punkt P sei nun im Zahnstangen – KOS fest vorgegeben und (x) lassen wir daher weg. P ist also ein materieller Punkt der Zahnstange. Es ergibt sich:

- $(\underline{P}(\varphi)) = (P_x, P_y, z)^t_{ZK} = (P_x - \varphi \cdot r_w, P_y + r_w, z)^t$ Die Koordinaten im Zahnstangen – KOS sind also P_x, P_y, z !
- Der zu \underline{P} gehörige Tangentialvektor im Stirnschnitt sei $\underline{e}_{Pt} = (e_{Ptx}, e_{Pty}, 0)^t$; dessen Koordinaten sind natürlich im globalen KOS und im Zahnstangen – KOS gleich und sind vom Parameter φ unabhängig. (3.2.3)b

Damit ergibt sich die **Gleichung für den Eingriff**, wenn also die Punkte T, C, P im globalen Koordinatensystem auf einer Geraden liegen.

$(\underline{C}) = (\underline{P}(\varphi)) + a \cdot (e_{Pty}, -e_{Ptx}, 0)^t$ Daraus ergibt sich:

- (a) $a = P_y / e_{Ptx}$
- (b) $\varphi = (P_x + P_y \cdot (e_{Pty} / e_{Ptx})) / r_w$
- (c) $x_w = -\varphi \cdot r_w = -(P_x + P_y \cdot (e_{Pty} / e_{Ptx}))$ (3.2.4)

Mit zu bestimmenden r_{bb} , $d \in \mathbb{R}$ ergibt sich der Tangentialpunkt \underline{I} und die Gleichung zum Bestimmen von r_{bb} , d:

- $\underline{I} = \underline{M} + r_{bb} \cdot (e_{Ptx}, e_{Pty}, 0)^t$
- Gleichung: $\underline{C} = (0, r_w, z)^t = \underline{I} + d \cdot (e_{Pty}, -e_{Ptx}, 0)^t$
- also: $r_{bb} = r_w \cdot e_{Pty}$ und $d = -r_w \cdot e_{Ptx}$ und damit:
- $\underline{I} = r_w \cdot e_{Pty} \cdot (e_{Ptx}, e_{Pty}, 0)^t + \underline{M}$

➤ Wir setzen: $r_b = r_w \cdot |e_{Pt}|$ (3.2.5)

Zusammenfassend haben wir also: Ausgehend von einem Punkt \underline{P} mit seinem Tangentialvektor \underline{e}_{Pt} auf der Zahnstangenflanke ergibt sich der Drehwinkel φ und damit die aktuellen Koordinaten von \underline{P} und \underline{I} im globalen Koordinatensystem. In dieser Konfiguration sind \underline{Q} (mit aktuell $(\underline{Q}) = (\underline{P})$) und \underline{I} (materielle) Punkte auf dem Zahnrad und es gilt, die Koordinaten im Zahnrad – KOS zu berechnen. Wir haben nun die Situation gemäß 3.1.2, wobei die aktuellen Basisvektoren des Zahnrad – KOS die Vektoren $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2$ seien:

$D_{e2}(\varphi) = U = ((\underline{u}_0), (\underline{u}_1), (\underline{u}_2))$ mit $\det(U)=+1$ ergibt sich:

- $(\underline{u}_0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^t, (\underline{u}_1) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)^t, (\underline{u}_2) = (0, 0, 1)$
- die Transformationsmatrizen $\underline{T}_{BU} = \underline{U}^t$ und $\underline{T}_{UB} = \underline{U}$, also:
- $(\underline{Q})_U = \underline{T}_{BU} \cdot (\underline{Q})$ und $(\underline{I})_U = \underline{T}_{BU} \cdot (\underline{I})$ (3.2.6)

Insbesondere gilt:

➤ $(\underline{Q} - \underline{I}) \cdot (\underline{I} - \underline{M}) = 0$, sind also orthogonal. (3.2.7)

Mit (3.2.1) bis (3.2.7) wird also im Stirnschnitt die Kontur der Zahnradverzahnung Punkt für Punkt aus den gegebenen Punkten der Zahnstange berechnet.

Umkehrung

Nun betrachten wir quasi die Umkehrung: **Die Zahnkontur des Zahnrads sei im Stirnschnitt punktweise fest vorgegeben.** Gesucht ist die Kontur der Zahnstangenverzahnung zu einem beliebigen Wälzzyylinder mit Radius r_w , natürlich auch punktweise.

Betrachten wir also einen Punkt $(\underline{P})_U$ der Kontur, so ist gegeben:

- Die Punkte $(\underline{Q})_U, (\underline{I})_U, (\underline{M})_U$ mit $(\underline{Q} - \underline{I}) \cdot (\underline{I} - \underline{M}) = 0$
- und der Radius r_w . (3.2.8)

Wir wiederholen: Die Stirnschnittebene habe die Position z , wobei z in diesem Kontext eine Konstante ist. Für den **Wälzkreismittelpunkt** \underline{M} und den **Wälzpunkt** \underline{C} erhält man also:

- $(\underline{M})_U = (\underline{M}) = (0, 0, z)^t$
- $\underline{C} = (0, r_w, z)^t$ siehe: (3.2.1)

Für die Zahnstange erhält man im Stirnschnitt die Wälzlinie und Bezugslinie:

(a) Wälzlinie: $\underline{C} + a \cdot (\underline{e}_x), \quad a \in \mathbb{R}$

(b) Bezugslinie: $\underline{C} + (0, yz, 0)^t + a \cdot (\underline{e}_x), \quad a \in \mathbb{R}$ siehe: (3.2.2)

Ende der Wiederholung.

Gesucht ist zunächst der Drehwinkel φ , indem man die **Gleichung für den Eingriff** aufstellt, wenn also die Punkte T, C, Q im globalen Koordinatensystem auf einer Geraden liegen. Mit den Basisvektoren des Zahnrad – KOS die Vektoren \underline{u}_0 , \underline{u}_1 , \underline{u}_2 ergibt sich:

- $D_{e2}(\varphi) = \underline{U} = (\underline{u}_0) , (\underline{u}_1) , (\underline{u}_2)$ mit $\det(U)=+1$
- $(\underline{u}_0) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)^t$, $(\underline{u}_1) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), 0)^t$, $(\underline{u}_2) = (0, 0, 1)$
- die Transformationsmatrizen $\underline{T}_{BU} = \underline{U}^t$ und $\underline{T}_{UB} = \underline{U}$, also:
- $(\underline{Q})_U = \underline{T}_{BU} \cdot (\underline{Q})$ und $(\underline{I})_U = \underline{T}_{BU} \cdot (\underline{I})$ siehe: (3.2.6)

Sei $(\underline{I})_U = (T_x, T_y, z)_U^t$ und $\underline{r}_T = (\underline{I})_U - (\underline{M})_U = (T_x, T_y, 0)_U^t$ und $\underline{r}_T^\perp = (-T_y, T_x, 0)_U^t$, so ergibt sich die **Gleichung für den Eingriff** zu:

- $(\underline{C}) = (0, r_w, z)^t = \underline{T}_{UB} \cdot (\underline{I})_U + a \cdot \underline{T}_{UB} \cdot (\underline{r}_T^\perp)_U$; aufgelöst ergibt sich:
- $r_w \cdot \cos(\varphi) = T_y + a \cdot T_x$ und
- $r_w \cdot \sin(\varphi) = a \cdot T_y - T_x$ und damit:
- $a^2 = r_w^2 / (T_x^2 + T_y^2) - 1$ mit 2 Lösungen a_1 und $a_2 = -a_1$ und
- Das Vorzeichen von a ergibt sich aus der Abfrage für $\cos 1 = (T_y + a_1 \cdot T_x) / r_w$ und $\cos 2 = (T_y + a_2 \cdot T_x) / r_w$: Aus $\cos 1 \geq \cos 2$ folgt $a=a_1$, andernfalls $a=a_2$.
- $\tan(\varphi) = (a \cdot T_y - T_x) / (T_y + a \cdot T_x)$ (3.2.9)

3.3 Beispiel: Flanke bestehend aus mehreren Evolvententeilen im Stirnschnitt

Für ein Zahnrad seien die Zähnezahl z und der Stirnmodul m_t gegeben. Damit ergibt sich gemäß DIN 3960 im Stirnschnitt der Teilkreisradius $r = 0,5 \cdot z \cdot m_t$ und die Stirnteilung $p_t = \pi \cdot m_t$. Damit nun folgende Formeln allgemein verwendbar und mit anderen Formeln kompatibel sind, setzen wir $r_w = r$ und $p_{wt} = p_t$. Es sei aber betont, dass durch r ein spezieller Wälzkreis, eben der Teilkreis, vorgegeben wird, der der rechnerischen Erzeugung der Zahnkontur dient.

Wir wollen nun mit einem Zahnstangenzahn, der stückweise aus geraden Teilen besteht, eine Zahnradlücke definieren. Hierzu betrachten wir einen beliebigen geraden Flankenteil FT. Wir erinnern: Die aktuellen Basisvektoren des **Zahnstangen – Koordinatensystems (Index ZK)** sind die Vektoren der Standardbasis $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$. Der Ursprung \underline{z}_0 ist gegeben durch: $(\underline{z}_0(\varphi)) = (-\varphi \cdot r_w, r_w, 0)^t$; siehe(3.1.3)a). Man erhält:

- (a) FT habe den Profil – Eingriffswinkel α_{Pt} , der in diesem Kontext vorzeichenbehaftet ist und zwar im ZK $0 < \alpha_{Pt} < 90^\circ$ für $x > 0$ und $-90^\circ < \alpha_{Pt} < 0$ für $x < 0$.
- (b) mit $si = \sin(\alpha_{Pt})$ und $co = \cos(\alpha_{Pt})$ und $x = P_x(x)$ ergibt sich
- (c) Richtungsvektor für die Tangente für FT: $\underline{e}_{Pt} = (si, co, 0)^t$
- (d) Geradenteil: $(\underline{P}(x))_{ZK} = (x, (x - K_e) \cdot co / si, z)^t_{ZK} = (P_x(x), P_y(x), z)^t_{ZK}$, wobei $\underline{P}(K_e) = (K_e, 0, z)^t_{ZK}$ der Schnittpunkt mit der Wälzgeraden ist und K_e eine zu bestimmende Konstante.
- (e) $\underline{P}(x, \varphi) = (x - \varphi \cdot r_w, r_w + (x - K_e) \cdot co / si, z)^t = (P_x(x) - \varphi \cdot r_w, r_w + P_y(x), z)^t$ gemäß (3.2.3)b); man beachte: **x ist ein Wert auf x – Achse des ZK!**
- (f) $\varphi = (x + (x - K_e) \cdot (co / si)^2) / r_w$ gemäß (3.2.4)
- (g) $x_w = -\varphi \cdot r_w = -(x + (x - K_e) \cdot (co / si)^2)$ gemäß (3.2.4), also x_w Position im globalen KOS
- (h) $\underline{I} = r_w \cdot co \cdot (si, co, 0)^t + \underline{M}$, womit auch der **Grundkreisradius** $r_b = r_w \cdot co$ definiert wird. (3.3.1)

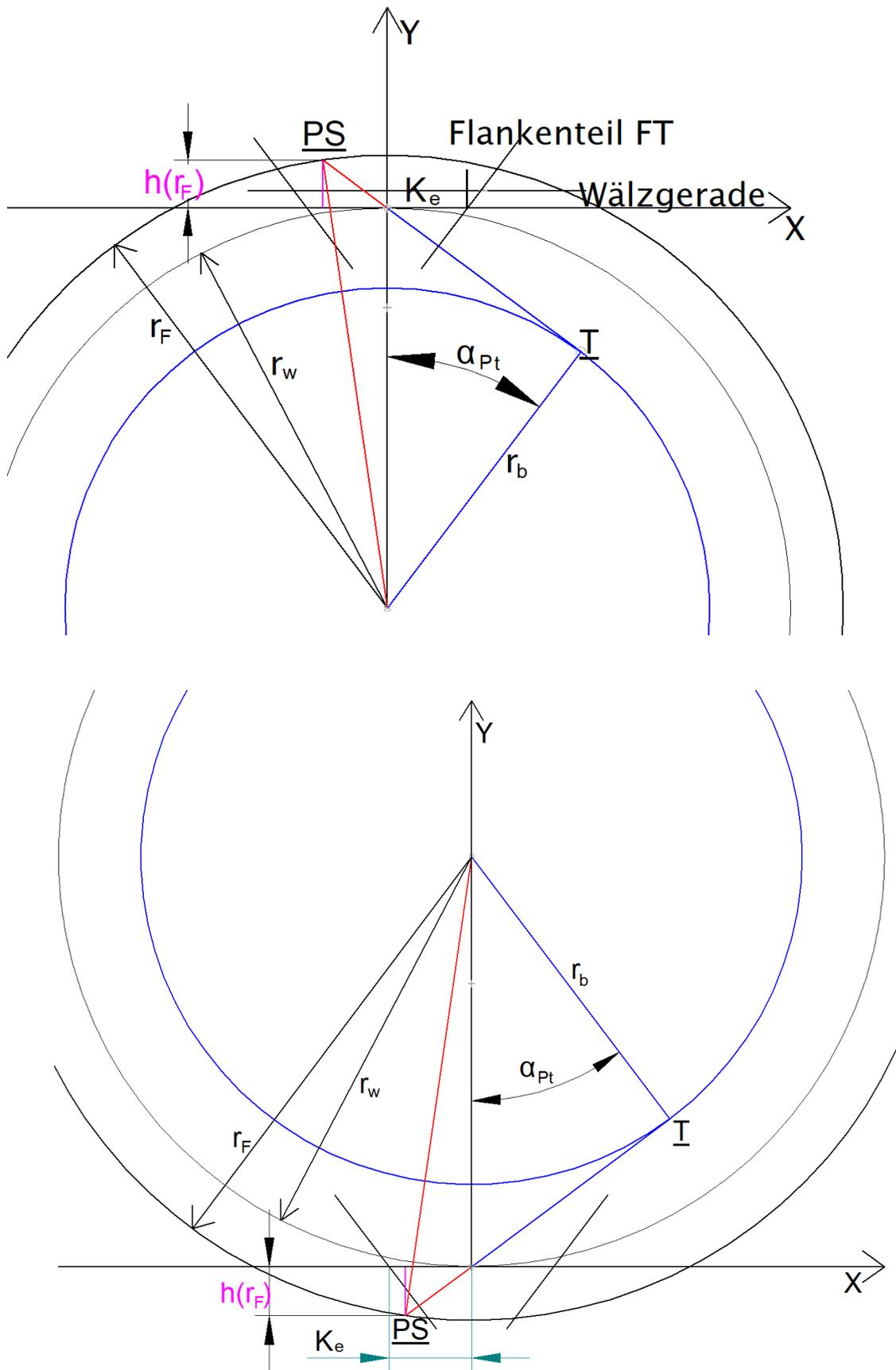


Bild 3.3.1 Gerades Flankenteil, oben: Außenverzahnung, also $r_b > 0$, $r_w > 0$ und $r_F > 0$; hier gilt für den Profilwinkel: $0 < \alpha_{Pt}$; unten: Innenverzahnung, also $r_b < 0$, $r_w < 0$ und $r_F < 0$; hier gilt für den Profilwinkel: $0 > \alpha_{Pt}$

Natürlich muss noch die Konstante K_e bestimmt werden. Betrachten wir aber zuerst den Fall, dass ein Formkreis im Stirnschnitt eines Formzylinders mit Radius r_F gegeben ist. Der Schnittpunkt \underline{PS}_F ergibt sich **im globalen KOS** mit $vz = \text{Signum}(si)$ und $u^2 = r_F^2 - r_w^2$ zu:

- (a) Gegeben r_F , $si = \sin(\alpha_{Pt})$, $co = \cos(\alpha_{Pt})$, $\underline{I} = r_w \cdot co \cdot (si, co, 0)^t + \underline{M}$
- (b) Zu bestimmen: $\underline{PS}_F = \underline{I} + u \cdot (-co, si, 0)^t$ mit $r_F^2 = PS_{Fx}^2 + PS_{Fy}^2$
- (c) Man erhält: $u^2 = r_F^2 - (r_w \cdot co)^2$ und mit $vz = \text{Signum}(r_w \cdot si)$ ergibt sich:
- (d) $u = vz \cdot \sqrt{(r_F^2 - (r_w \cdot co)^2)}$; damit weiter, wobei dem Schnittpunkt \underline{PS}_F bei entsprechender Wälzstellung φ_F ein Punkt $\underline{P}_F = (P_{Fx}, P_{Fy}, z)_{ZK}^t$ auf der Zahnstangenflanke entspricht:
- (e) $PS_{Fx} = r_w \cdot co \cdot si - co \cdot u = P_{Fx} - r_w \cdot \varphi_F$
- (f) $PS_{Fy} = r_w \cdot co^2 + si \cdot u = P_{Fy} + r_w$
- (g) $P_{Fy} = h(r_F) = PS_{Fy} - r_w = -r_w \cdot si^2 + si \cdot u =$ vorzeichenbehafteter Abstand zur Wälzgeraden
- (h) $P_{Fx} = (P_{Fy} + K_e \cdot co / si) \cdot si / co$ und schließlich:
- (i) $PS_{Fx} = P_{Fx} - \varphi_F \cdot r_w$ also: $\varphi_F = (P_{Fx} - PS_{Fx}) / r_w =$ vorzeichenbehafteter Drehwinkel des Zahnrads (3.3.2)

Damit haben wir zum Radius r_F die Koordinaten des Punktes \underline{P}_F im Zahnstangen – KOS bestimmt. Wir nehmen an, dass die Konstante K_e bereits bestimmt ist und fragen uns, wie der Radius r_F für einen vorgegebenen Punkt \underline{P}_F bestimmt werden kann. Mit $h_F = P_{Fy}$ erhält man aus (3.3.2) (g):

- $u = vz \cdot \sqrt{(r_F^2 - (r_w \cdot co)^2)} = (h_F + r_w \cdot si^2) / si$; beide Seiten quadriert und aufgelöst:
- $r_F^2 = (h_F / si)^2 + 2 \cdot h_F \cdot r_w + r_w^2$ (3.3.3)

Wir nehmen nun an, dass der Punkt \underline{P}_F des geraden Flankenteils FT ein Randpunkt (also Anfang oder Ende) sei und sich dort ein Flankenteil FT1 mit dem Eingriffswinkel α_{Pt1} anschliesse. Sinngemäß gilt natürlich auch für dieses Flankenteil (3.3.1), insbesondere:

- (a) mit $si1 = \sin(\alpha_{Pt1})$ und $co1 = \cos(\alpha_{Pt1})$ und $x = P1_x(x)$ ergibt sich
- (b) $\underline{e}_{Pt1} = (si1, co1, 0)^t$
- (c) $\underline{P1}(x) = (x, (x - K_{e1}) \cdot co1 / si1, z)_{ZK}^t = (P1_x(x), P1_y(x), z)_{ZK}^t$ (3.3.4)

Gemäß der Voraussetzung gibt es auf FT1 einen Punkt $\underline{P1}_F = \underline{P}_F$ auf dem Flankenteil, also der spezielle Punkt:

- $P1_{Fx} = P_{Fx}$
- $P1_{Fy} = P_{Fy} = (P_{Fx} - K_{e1}) \cdot co1 / si1$, also
- $K_{e1} = P_{Fx} - P_{Fy} \cdot si1 / co1$ (3.3.5)

Die Konstante K_{e1} ergibt sich also recht einfach. In der Regel ist der Flankenteil FT die „Hauptflanke“, bei der sich die Konstante K_e mit Hilfe der Zahndicke am Wälzkreis ergibt.

Natürlich gilt auch die Formel (3.3.3) für FT1: $r_{F1}^2 = (h_F / \sin 1)^2 + 2 \cdot h_F \cdot r_w + r_w^2$. Wir erhalten also für $\underline{P1}_F = \underline{P}_F$ einen weiteren Radius r_{F1} . Folgendes Beispiel verdeutlicht den Sachverhalt:

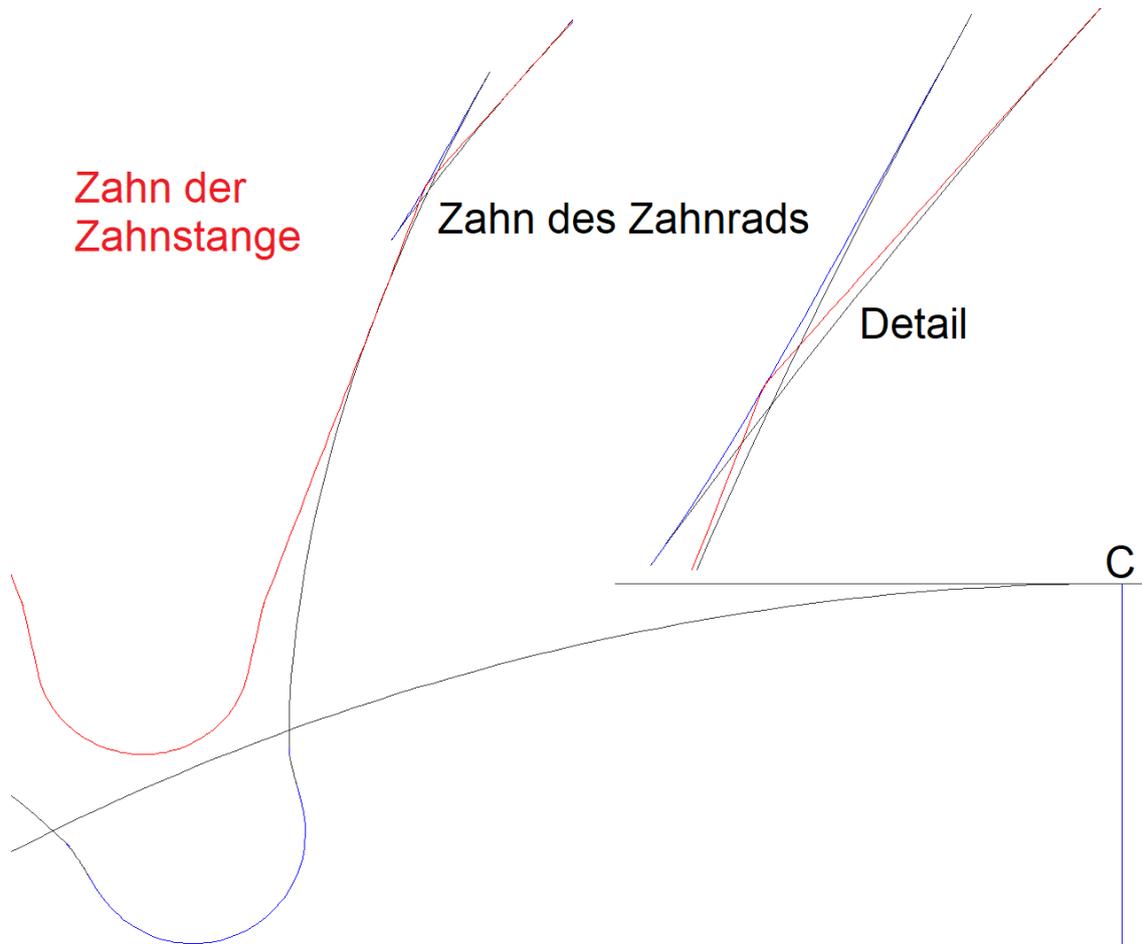


Bild 3.3.2 Der Ausschnitt zeigt im Detail die beiden Radien – Punkte für r_F und r_{F1} . Der reale Formkreisradius r_{Fr} ergibt sich durch den Schnittpunkt PS_{ZR} der Zahnradkontur schwarz.

Der Ausschnitt in Bild 3.3.2 zeigt im Detail die beiden Radien – Punkte für r_F und r_{F1} . Der reale Formkreisradius r_{Fr} ergibt sich durch den Schnittpunkt PS_{ZR} der Zahnradkontur schwarz. PS_{ZR} erhält man wie folgt:

- für einen beliebigen Radius r_{Fh} werden jeweils gemäß (3.3.2) die Schnittpunkte \underline{PS}_{Fh} und \underline{PS}_{F1h} und dazu gemäß (3.3.2) (i) die Drehwinkel φ_{Fh} und φ_{F1h}
- Danach werden durch die entsprechende Dreh – Transformationen die Koordinaten $(\underline{PS}_{Fh})_{U_{\varphi_{Fh}}} = \underline{T}_{B_{\varphi_{Fh}}} \cdot (\underline{PS}_{Fh})$ und $(\underline{PS}_{F1h})_{U_{\varphi_{F1h}}} = \underline{T}_{B_{\varphi_{F1h}}} \cdot (\underline{PS}_{F1h})$ im Koordinatensystem des Zahnrads berechnet (siehe (3.2.6))
- Dort wird der Abstand der Punkte ermittelt, der in Abhängigkeit von r_{Fh} mit Hilfe eines nichtlinearen Gleichungslöser zu 0 gemacht wird.

- Die Lösung ist der gesuchte reale Formkreisradius r_{Fr} für unser Problem.
- Formkreisradius r_{Fr} gibt es natürlich auf jedem der Flankenteile FT und FT1 jeweils einen Punkt gemäß (3.3.2) und zwischen diesen Punkten gibt es einen Spielraum für die Flankenauslegung des Zahnstangenprofils.

4 Das Schrägstirnrad mit virtuellen Zahnstangen

Prinzipielle Vorgehensweise:

Die Konfiguration von Zahnrad, Zahnstange und den drei Koordinatensystemen ist in Abschnitt 3.1 beschrieben. Während in Abschnitt 3 nur ein Stirnschnitt behandelt wird erweitern wir nun die Betrachtung „über alle Stirnschnitte“, wobei nun der Schrägungswinkel bzw. die Steigung berücksichtigt werden muss.

4.1 Die Schraubenlinie (Helix)

Für die Definition der Schrägverzahnung spielt die Schraubenlinie, eine echte Raumkurve, eine wesentliche Rolle. Eine Schraubenlinie $\underline{u}(\delta)$ wird mit Hilfe einer Steigung s und einem Zylinder mit dem Radius $r_w \neq 0$ definiert (Windung um z – Achse) :

$$\rightarrow \underline{u}(\delta) = r_w \cdot (\underline{e}_x \cdot \cos(\delta) + \underline{e}_y \cdot \sin(\delta)) + s \cdot \delta \cdot \underline{e}_z + \underline{v} \quad (4.1.1)$$

Die Schraubenlinie windet sich also um die z – Achse, wobei ja die Richtung der z – Achse mit der Richtung der Drehachse des Zahnrads identisch sein soll.

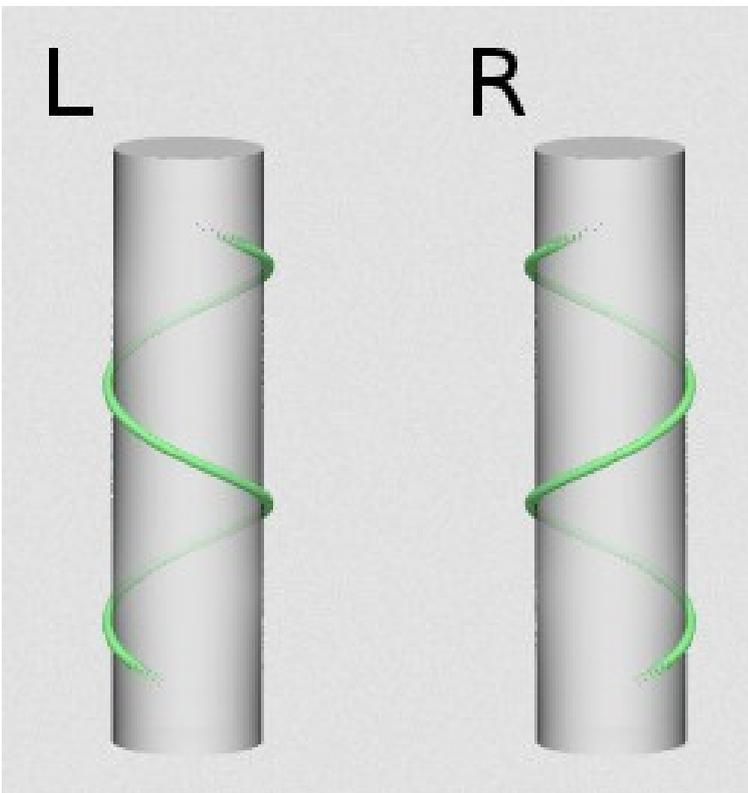


Bild 3.2.1: Linksgängige (L, $s < 0$) – und rechtsgängige (R, $s > 0$) Schraubenlinie.

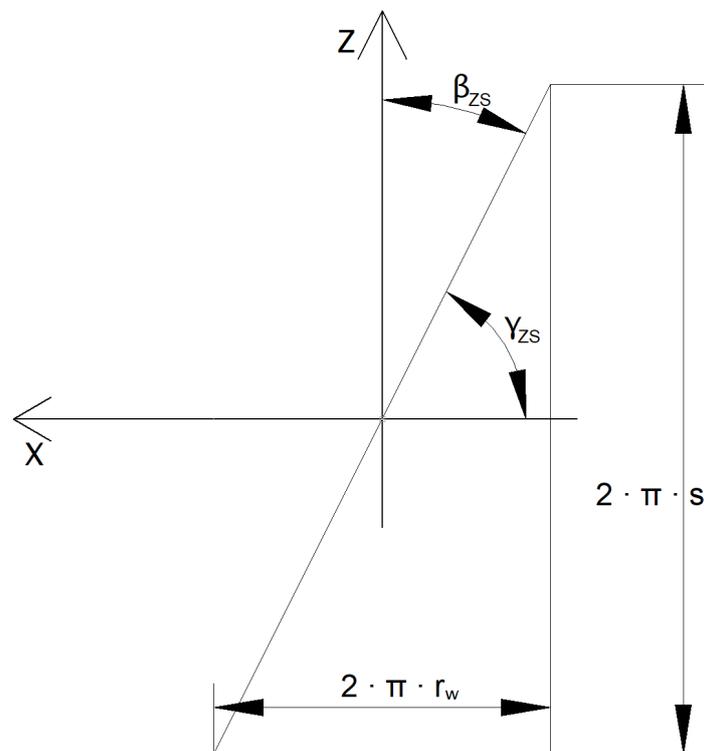
Die Schraubenlinie befindet sich also auf bzw. in einem Zylinder. Man kann nämlich von außen auf die Zylinderfläche schauen ($r_w > 0$, Außenverzahnung) oder von innen ($r_w < 0$, Innenverzahnung) und damit hat man auch zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die Zylinderfläche abzuwickeln. Man erhält:

Für $s \neq 0$ Definition (4.1.2):

- (a) Steigungshöhe $p_z = s \cdot 2 \cdot \pi$, hier **vorzeichenbehaftet!**
- (b) Steigungswinkel γ_w aus $\tan(\gamma_w) = s / r_w$
- (c) Schrägungswinkel β_w aus $\tan(\beta_w) = r_w / s$
- (d) Es gilt: Aus $\gamma_w > 0$ folgt: $\beta_w = \pi / 2 - \gamma_w > 0$; man sagt: rechtssteigend
- (e) Es gilt: Aus $\gamma_w < 0$ folgt: $\beta_w = -\pi / 2 - \gamma_w < 0$; man sagt: linkssteigend
- (f) Axialteilung: $p_x = p_z / z = s \cdot 2 \cdot \pi / z$ mit $z = \text{Zähnezahl}$

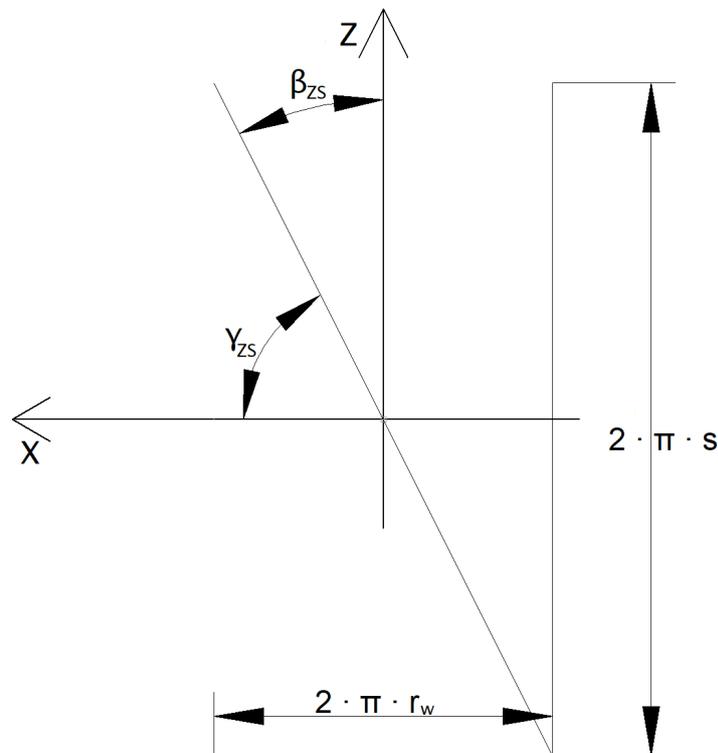
Speziell was die Abwicklung des Wälzzylinders auf die Zahnstangen – Wälzebene betrifft gilt (siehe Bilder 3.2.1 a) und b)):

Außenverzahnung $r_w > 0$ mit $s > 0$ bzw. Innenverzahnung $r_w < 0$ mit $s < 0$:



Man sieht, dass für den Steigungswinkel γ_{zs} gilt: $\tan(\gamma_{zs}) = -s / r_w$ gilt und entsprechend für den Schrägungswinkel β_{zs} aus $\tan(\beta_{zs}) = -r_w / s$

Außenverzahnung $r_w > 0$ mit $s < 0$ bzw. Innenverzahnung $r_w < 0$ mit $s > 0$:



Man sieht, dass für den Steigungswinkel γ_{zs} gilt: $\tan(\gamma_{zs}) = -s / r_w$ gilt und entsprechend für den Schrägungswinkel β_{zs} aus $\tan(\beta_{zs}) = -r_w / s$.

Vergleichbares gilt auch für $s < 0$ und man erhält zusammenfassend für die Wälzebene:

Satz (4.1.3)

- (a) Steigungswinkel γ_{zs} aus $\tan(\gamma_{zs}) = -s / r_w$
- (b) Schrägungswinkel β_{zs} aus $\tan(\beta_{zs}) = -r_w / s$
- (c) Es gilt: Aus $\gamma_{zs} > 0$ folgt: $\beta_{zs} = \pi / 2 - \gamma_{zs} > 0$; man sagt: rechtssteigend
- (d) Es gilt: Aus $\gamma_{zs} < 0$ folgt: $\beta_{zs} = -\pi / 2 - \gamma_{zs} < 0$; man sagt: linkssteigend
- (e) Bemerkung: Es gilt natürlich: $\beta_{zs} = -\beta_w$ und $\gamma_{zs} = -\gamma_w$

Definition (4.1.4) Richtungsvektor für Normalschnitt

- $\underline{w} = \text{Signum}(s) \cdot (-r_w / \sqrt{(r_w^2 + s^2)}, 0, s / \sqrt{(r_w^2 + s^2)})^t = (\sin(\beta_{zs}), 0, \cos(\beta_{zs}))^t$
- Zu \underline{w} senkrecht: $\underline{w}^\perp = (\cos(\beta_{zs}), 0, -\sin(\beta_{zs}))^t$

Bemerkung (4.1.5) Geradverzahnung

Für eine Geradverzahnung gilt: $\beta_{zs} = -\beta_w = 0$ und $\underline{w} = (0, 0, 1)^t$, $\underline{w}^\perp = (1, 0, 0)^t$

4.2 Normalschnitt und Stirnschnitt der Zahnstange, zentrale Definition

Wir beziehen uns auf die in Abschnitt 3 beschriebene Konfiguration, insbesondere gemäß der Bilder 3.2.1 a) und 3.2.1 b). Wir betrachten die Zahnstange mit dem

Schrägungswinkel β_{zs} und betrachten die Situation für $\varphi = 0$. Dazu werden nun die relevanten Ebenen für die Zahnstange definiert, wobei hier $(\underline{C}) = (0, r_w, 0)^t$ und $(\underline{M}) = (0, 0, z)^t$ setze. Wir beginnen mit der Wälzebene und der Stirnschnittebene in Höhe z :

- Die **Wälzebene** $E_W = \{ \underline{x} = (\underline{C}) + a \cdot (1, 0, 0)^t + b \cdot (0, 0, 1)^t, \quad a, b \in \mathbb{R} \}$ mit dem Normalenvektor auf der Wälzebene $\underline{n}_W = (0, 1, 0)^t$.
- **Stirnschnittebene** $E_{St} = \{ \underline{x} = (\underline{C}) + a \cdot (1, 0, 0)^t + b \cdot (0, 1, 0)^t, \quad a, b \in \mathbb{R} \}$ mit dem Normalenvektor auf der Wälzebene $\underline{n}_{St} = (0, 0, 1)^t$. (4.2.1)

Als nächstes wird zur globalen Standardbasis $B = \{ \underline{e}_0 = (1, 0, 0)^t, \quad \underline{e}_1 = (0, 1, 0)^t, \quad \underline{e}_2 = (0, 0, 1)^t \}$ eine neue Basis B_N definiert und mit dieser die Normalschnittebene :

- $B_N = \{ \underline{e}_{N0} = \underline{w}^\perp = (\cos(\beta_{zs}), 0, -\sin(\beta_{zs}))^t, \quad \underline{e}_{N1} = (0, 1, 0)^t, \quad \underline{e}_{N2} = (\sin(\beta_{zs}), 0, \cos(\beta_{zs}))^t \}$
- **Normalschnittebene** $E_{NS} = \{ \underline{x} = \underline{C} + a \cdot (0, 1, 0)^t + b \cdot \underline{w}^\perp, \quad a, b \in \mathbb{R} \}$ mit dem Normalenvektor auf E_{NS} : $\underline{n}_{NS} = \underline{w} = (1, 0, 0)^t \times \underline{w}^\perp = (\sin(\beta_{zs}), 0, \cos(\beta_{zs}))^t$
- Mit der Transformationsmatrix $\underline{T}_{B_N, B} = (\underline{e}_{N0}, \underline{e}_{N1}, \underline{e}_{N2})$ und
- der Transformationsmatrix $\underline{T}_{B, B_N} = \underline{T}_{B_N, B}^t$ (4.2.2)

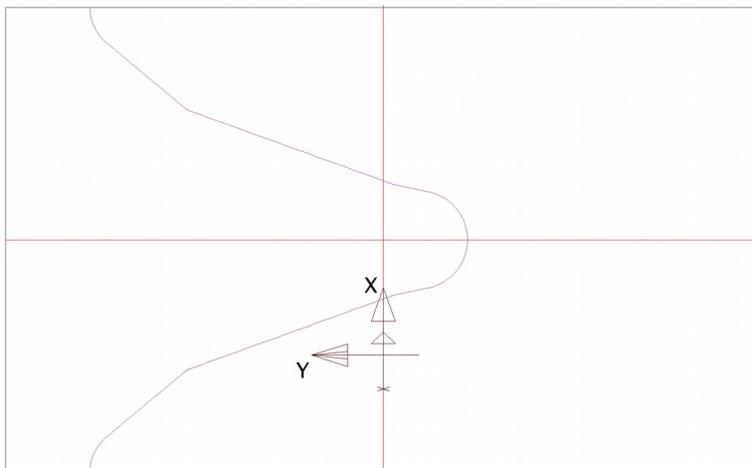


Bild 4.2.1 Differenzierbare Kontur im Normalschnitt mit Projektion des globalen Koordinatensystems auf die Normalschnittebene; y – Richtung gleich mit $\underline{e}_{N1} = \underline{e}_1$; dazu im Normalschnitt senkrechte Richtung: $\underline{e}_{N0} = \underline{w}^\perp$

Von besonderem Interesse sind der Normalenvektor und die differenzierbare Kontur

- $\underline{n}_{NS} = (0, 0, 1)_{B_N}^t = (\sin(\beta_{zs}), 0, \cos(\beta_{zs}))^t$ und
- Knt_n : differenzierbare Kontur im Normalschnitt, d.h. es gilt:
- Für alle $\underline{p} \in Knt_n$ existiert ein Tangenten – Richtungsvektor \underline{e}_{pT} mit $|\underline{e}_{pT}| = 1$ (4.2.3)

Damit kommen wir zur zentralen Definition der (virtuellen, also gedachten) Zahnstange:

Definition (4.2.4) Zahnstange, Flankenebene

Gegeben sei eine Normalschnittebene E_{NS} mit dem Normalenvektor \underline{n}_{NS} und eine differenzierbare Kontur Knt_n gemäß (4.2.2) und (4.2.3). Dann wird die Zahnstange definiert durch die Menge der folgenden Geraden:

→ für $\underline{P} \in Knt_n$ existiere die Gerade $g_P = \{ \underline{x} = \underline{P} + a \cdot \underline{n}_{NS}, a \in \mathbb{R} \}$

Weiter wird für alle Punkte der Kontur die Flankenebene E_{PF} definiert:

→ Flankenebene $E_{PF} = \{ \underline{x} = \underline{P} + a \cdot \underline{n}_{NS} + b \cdot \underline{e}_{PT}, a, b \in \mathbb{R} \}$

Folgende Bilder veranschaulichen den Sachverhalt:

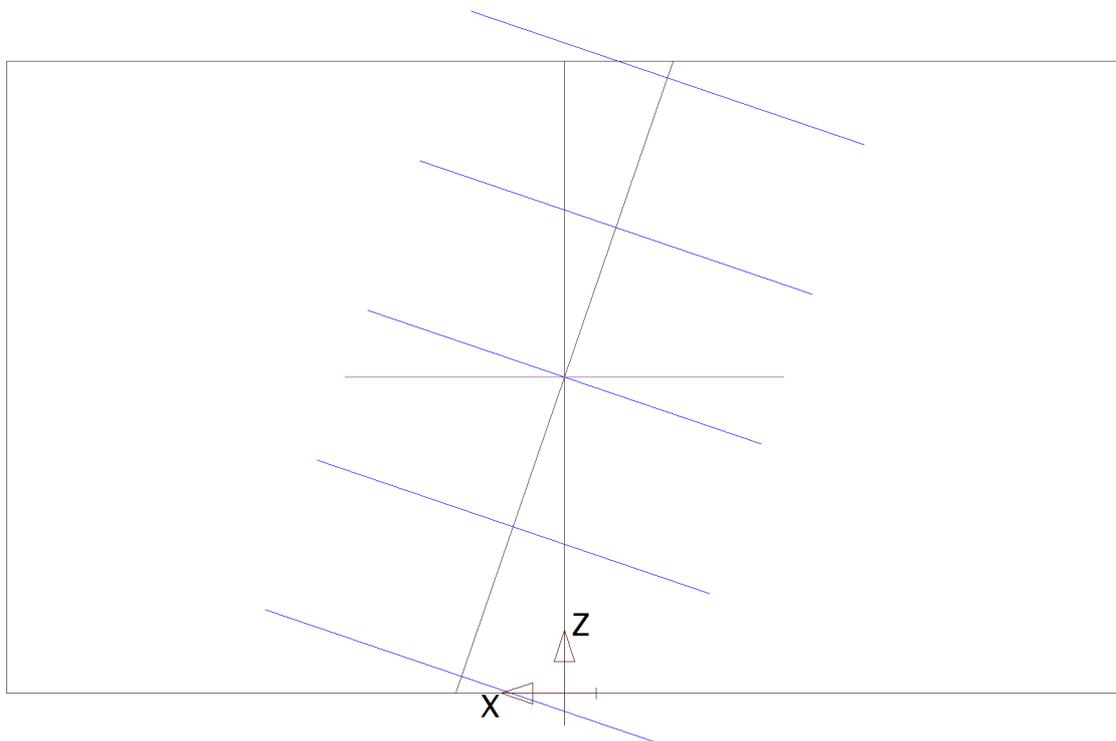


Bild 4.2.2 Projektion von Normalschnitten (blau) auf die $x - z -$ Ebene; $\beta_{ZS} = - 18,7^\circ$; wenn dies die Zahnstange zum Teilkreis ist, haben wir für das Zahnrad gemäß DIN3960: $\beta = - \beta_{ZS}$.

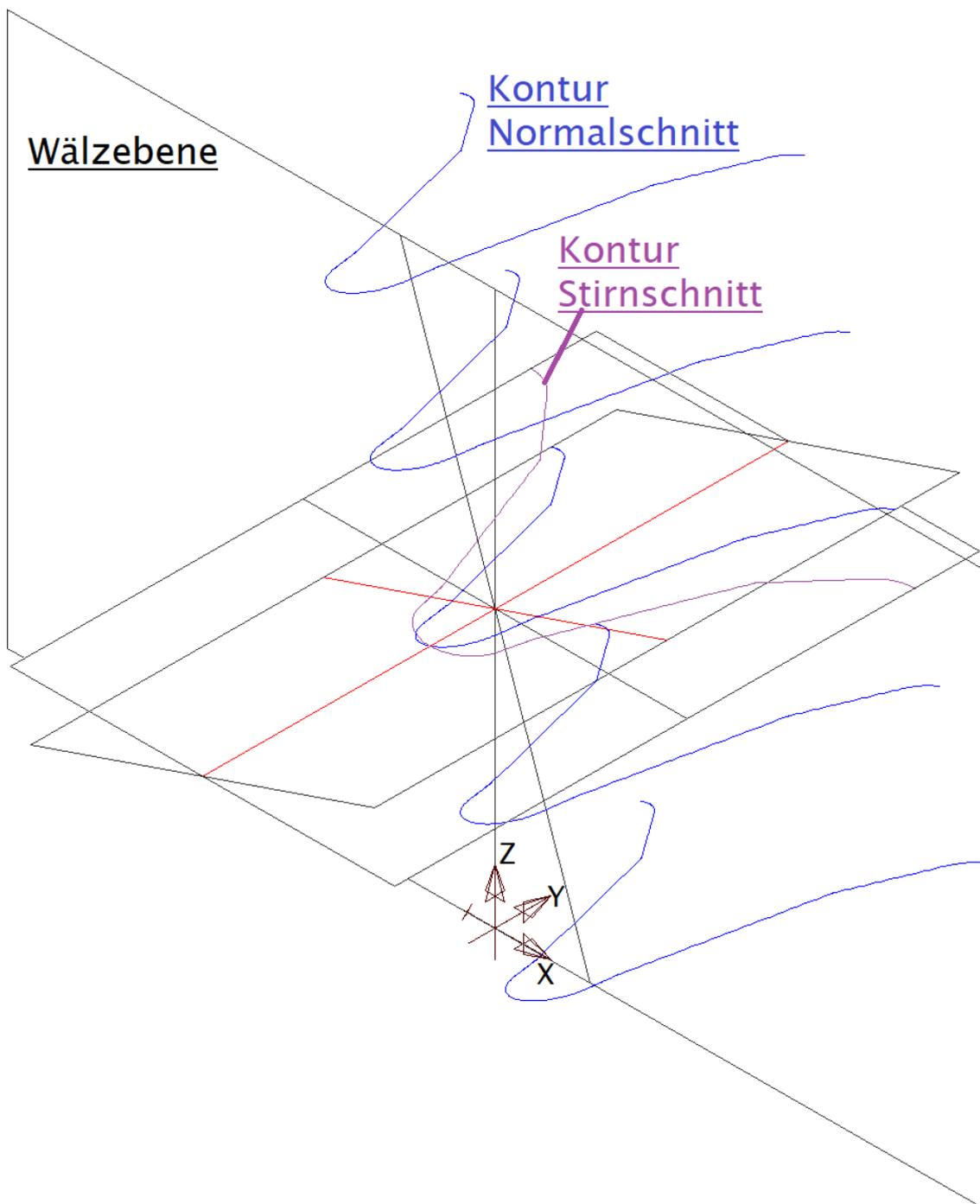


Bild 4.2.3 Isometrische Projektion zu Bild 4.2.2; Normalschnitte mit Normalschnittebene, Stirnschnittebene mit Projektion der Normalschnitt – Kontur

Es bleibt nun zu berechnen:

Satz (4.2.5) Die Projektion der Normalschnitt – Kontur auf die Stirnschnittebene

Sei $\underline{P} \in \text{Knt}_n$ mit \underline{e}_{PT} und zwar: $(\underline{P})_{BN} = (P_x, P_y, 0)_{BN}^t$ und $(\underline{e}_{PT})_{BN} = (e_{PTx}, e_{PTy}, 0)_{BN}^t$ so gilt für die Projektion auf die Stirnschnittebene mit $c = \cos(\beta_{ZS})$:

- $(\underline{P}_S) = (P_x / c, P_y, 0)^t$ im globalen Koordinatensystem und
- $(\underline{e}_{PST}) = (1 / B) \cdot (e_{PTx} / c, e_{PTy}, 0)^t$ mit $B = \sqrt{((e_{PTx} / c)^2 + e_{PTy}^2)}$

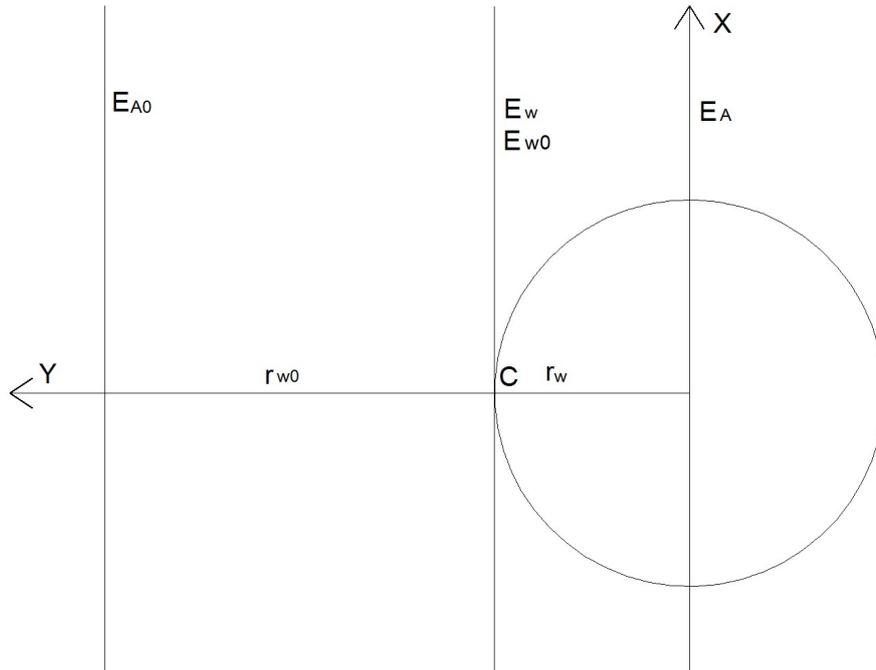
Bemerkung: O.B.d.A. wird hier die z – Position der Stirnebene auf 0 gesetzt!

Beweis von (4.2.5): Zunächst haben wir: $(\underline{P}) = \underline{T}_{BN_B} \cdot (\underline{P})_{BN}$ (s.(4.2.2)) . Nun erfolgt die Projektion: $(\underline{P}_S) = (\underline{P}) + a \cdot (\underline{n}_{NS})$. Die Variable a muss nun so bestimmt werden, dass die z – Komponente von $\underline{P}_{Sz} = 0$ ergibt. Ausgerechnet erhält man die Ergebnisse von (4.2.5).

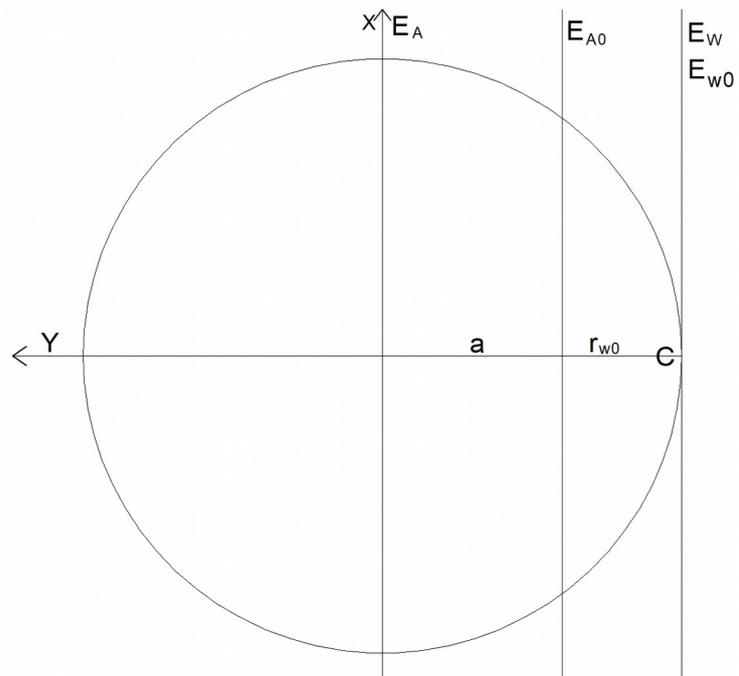
Korollar (4.2.6) Aus der Stirnschnittteilung $p_{tw} = (2 \cdot \pi \cdot r_w) / z$ ergibt sich die Normalschnittteilung $p_{nw} = p_{tw} \cdot \cos(\beta_{zs})$.

5 Paarung des Zahnrads ZR mit einem Gegenrad (Werkzeug) ZR0

5.1 Grundlegende Zusammenhänge



Konfiguration Außenverzahnung



Konfiguration Innenverzahnung

Bild 5.1.1 Werkradstirnschnitte Außenverzahnung und Innenverzahnung; der Wälzpunkt C wird hier auch Schraubpunkt S genannt und ist eindeutig bestimmt

Bild 5.1.1 zeigt die Grundkonfiguration mit den 4 zueinander parallelen Ebenen:

- E_A , in der die Achse des Zahnrads ZR liegt
- E_{A0} , in der die Achse des Zahnrads ZR0 liegt
- E_w : Wälzebene der virtuellen Zahnstange ZS, die auf dem Wälzzylinder mit dem Radius r_w des Zahnrads ZR abrollt, r_w ist vorzeichenbehaftet.
- E_{w0} : Wälzebene der virtuellen Zahnstange ZS0, die auf dem Wälzzylinder mit dem Radius r_{w0} des Zahnrads ZR0 abrollt, hier immer $r_{w0} > 0$.
- Dazu gibt es den Wälzpunkt C, wobei die Gerade, die parallel zur y – Achse ist und durch C verläuft, auch die beiden Achsen schneidet
- Allgemein gilt: Achsabstand $a = r_w + r_{w0}$ (5.1.1)

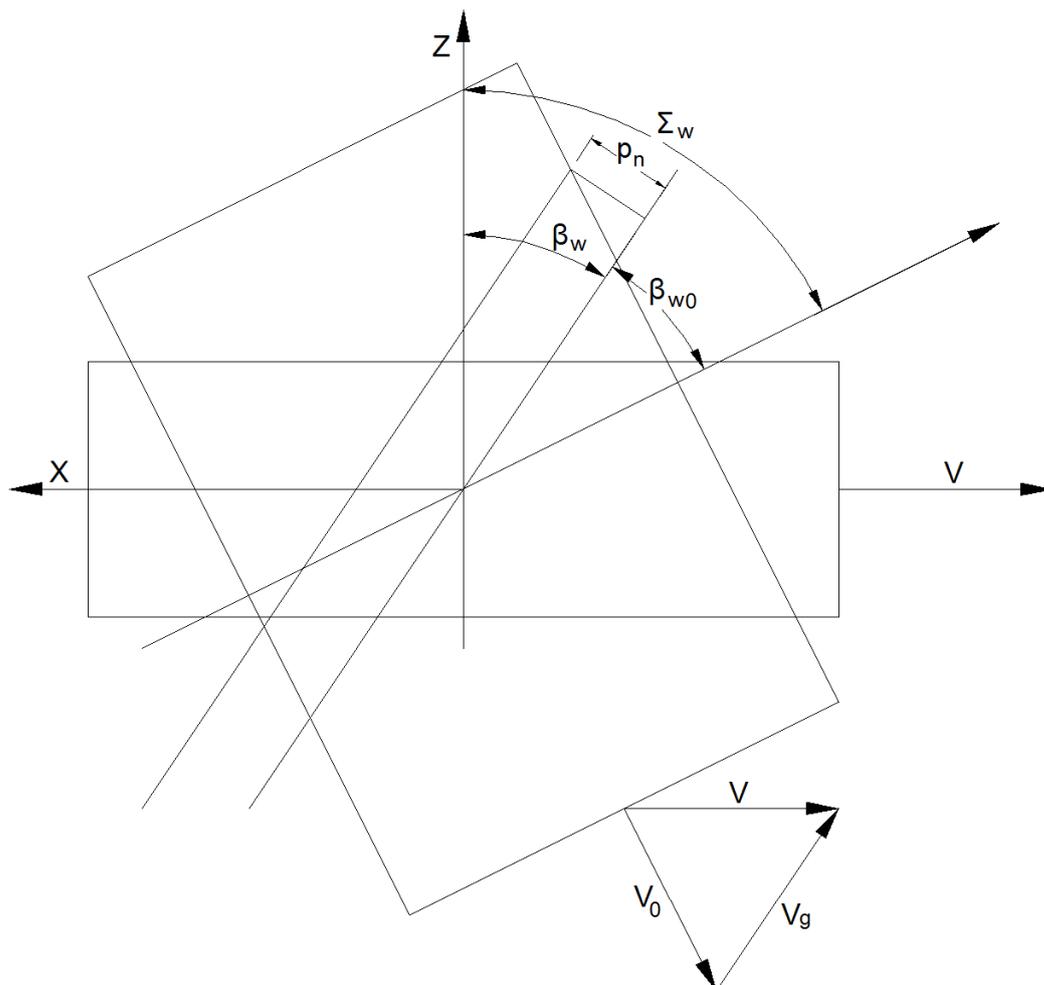


Bild 5.1.2 Projektion auf $X - Z$ – Ebene; Achse vom Werkrad ZR in Z – Richtung, die Achse vom Gegenrad ZR0 dazu im Achsenwinkel Σ_w ; dargestellt sind die Wälzebenen E_w und E_{w0} , Gleitgeschwindigkeit v_g in Richtung der Flankenlinien

Wir gehen vom Zahnrad ZR aus, das gemäß den Abschnitten 3 und 4 vorgegeben ist und die zum Wälzzylinder mit Radius r_w passende Zahnstange ZS sei bestimmt:

- Zähnezahl z
 - Steigung s
 - Wälzzylinder mit Radius r_w
 - Schrägungswinkel aus $\tan(\beta_w) = r_w / s$
 - virtuelle Zahnstange ZS mit Wälzebene E_w
 - Schrägungswinkel ZS $\beta_{ZS} = -\beta_w$
 - Normalschnitt der Zahnstange ZS
- (5.1.2)

Für das Gegenrad legen wir zunächst folgende zwei Werte fest:

- Zähnezahl z_0
 - Achsenwinkel Σ_w
- (5.1.3)

Da wir für das Gegenrad ZR0 dieselben Formeln gemäß den Abschnitten 3 und 4 verwenden wollen, wird im globalen Raum neben der Standardbasis B eine weitere Basis B' definiert:

- $B' = \{\underline{e}_0' = (-\cos(\Sigma_w), 0, \sin(\Sigma_w))^t, \underline{e}_1' = (0, -1, 0)^t, \underline{e}_2' = (\sin(\Sigma_w), 0, \cos(\Sigma_w))^t\}$
 - Mit $\underline{B}' = (\underline{e}_0', \underline{e}_1', \underline{e}_2')$, also $\det(\underline{B}') = +1$, ergeben sich
 - die Transformationsmatrizen $\underline{T}_{BB'} = \underline{B}'^t = \underline{B}$ und $\underline{T}_{B'B} = \underline{B}$, also für $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$:
 - $(\underline{v})_{B'} = \underline{T}_{BB'} \cdot (\underline{v})$ und $(\underline{v}) = \underline{T}_{B'B} \cdot (\underline{v})_{B'}$
- (5.1.4)

Nun bleibt der Richtungsvektor für den Normalschnitt $\underline{w} = (\sin(\beta_{ZS}), 0, \cos(\beta_{ZS}))^t$ gemäß (4.1.4) auch für das Gegenrad gleich und man hat:

- $(\underline{w})_{B'} = \underline{T}_{BB'} \cdot (\underline{w}) = (\sin(\Sigma_w - \beta_{ZS}), 0, \cos(\Sigma_w - \beta_{ZS}))_{B'}^t$ also gilt für den Schrägungswinkel β_{ZS0} der virtuellen Zahnstange ZS0 des Gegenrads mit Wälzebene E_{w0} :
 - Schrägungswinkel von ZS0: $\beta_{ZS0} = \Sigma_w - \beta_{ZS}$ oder:
 - Achsenwinkel $\Sigma_w = \beta_{ZS} + \beta_{ZS0}$
 - Schrägungswinkel ZR0 $\beta_{w0} = -\beta_{ZS0}$
 - Normalteilung von ZS0 $p_{nw0} = p_{nw}$
 - Stirnteilung von ZR0 $p_{tw0} = p_{nw0} / \cos(\beta_{w0})$
 - Radius Walzzylinder von ZR0 $r_{w0} = z_0 \cdot p_{tw0} / (2 \cdot \pi)$
- (5.1.5)

Damit ist die virtuelle Zahnstange ZS0 für das Gegenrad bereits vollständig bestimmt, weil der Normalschnitt ja gleich ist. Das folgende Bild 5.1.3 zeigt den Normalschnitt von Bild (4.2.1) bezüglich der Basis B' .

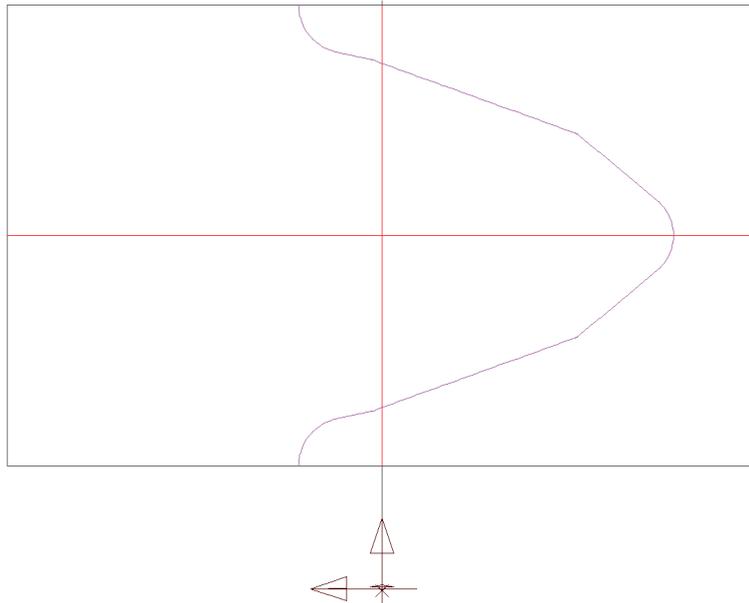


Bild 5.1.3 Normalschnitt von Bild (4.2.1) bezüglich der Basis B'

Noch eine **Bemerkung**:

Die (bzw. **eine**, falls $\beta_{ZS} + \beta_{ZS0} = 0$) kürzeste Verbindungslinie verläuft durch den Wälzpunkt C, der für $\beta_{ZS} + \beta_{ZS0} \neq 0$ eindeutig bestimmt ist und dann auch **Schraubpunkt** heißt.

Betrachten wir nun Bild 5.1.2 hinsichtlich der Geschwindigkeiten. Die Wälzebene E_w der Zahnstange ZS und die Wälzebene E_{w0} der Zahnstange ZS0 liegen direkt übereinander und rollen auf den jeweiligen Wälzzyclindern ab. Dreht sich nun das Zahnrad ZR mit der Umfangsgeschwindigkeit v und das Zahnrad ZR0 mit der Umfangsgeschwindigkeit v_0 , so werden entsprechend die mitlaufenden Zahnstangen auch bewegt. Eine Ausgleichsgeschwindigkeit zwischen den beiden Zahnstangen kann nur in Richtung der Zahnflanken in Form einer Gleitgeschwindigkeit erfolgen. Man hat damit vektoriell folgende Gleichungen:

$$\underline{v} = v \cdot (1, 0, 0)^t, \quad \underline{v}_0 = v_0 \cdot (\cos(\Sigma_w), 0, \sin(\Sigma_w))^t, \quad \underline{v}_g = v_g \cdot (-\sin(\beta_{ZS}), 0, \cos(\beta_{ZS}))^t$$

Beachtet man die Additionstheoreme:

- $\cos(\Sigma_w) = \cos(\beta_{ZS} + \beta_{ZS0}) = \cos(\beta_{ZS}) \cdot \cos(\beta_{ZS0}) - \sin(\beta_{ZS}) \cdot \sin(\beta_{ZS0})$
- $\sin(\Sigma_w) = \sin(\beta_{ZS} + \beta_{ZS0}) = \sin(\beta_{ZS}) \cdot \cos(\beta_{ZS0}) + \cos(\beta_{ZS}) \cdot \sin(\beta_{ZS0})$

so folgen aus $\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{v}_g$ die Gleichungen:

- a) $v \cdot \cos(\beta_{ZS}) = v_0 \cdot \cos(\beta_{ZS0})$
- b) $\underline{v}_g = -(v \cdot \sin(\beta_{ZS}) + v_0 \cdot \sin(\beta_{ZS0})) = -v_0 \cdot \sin(\Sigma_w) / \cos(\beta_{ZS})$ (5.1.6)

Die Gleitgeschwindigkeit wird nur für die Zahnstangenflanken ermittelt. Im Schraubpunkt C ist diese mit der Gleitgeschwindigkeit der Zähne der Zahnräder gleich; sonst werden noch weitere Komponenten überlagert, worauf später noch eingegangen wird.

Der Drehwinkel des Zahnrads ZR um die Achsrichtung $(0, 0, 1)^t$ werde mit $\varphi(t)$ bezeichnet und die Drehwinkelgeschwindigkeit mit $\omega(t) = d\varphi(t) / dt$; der Drehwinkel des Zahnrads ZR0 um die Achsrichtung $(-\sin(\Sigma_w), 0, \cos(\Sigma_w))^t$ werde mit $\varphi_0(t)$ bezeichnet und die Drehwinkelgeschwindigkeit mit $\omega_0(t) = d\varphi_0(t) / dt$. Damit gilt für das Übersetzungsverhältnis \ddot{U} :

$$\ddot{U} = \omega / \omega_0 = -z_0 / z$$

Wir nehmen nun konstante Drehwinkelgeschwindigkeiten ω , ω_0 an und erhalten:

$$(a) v_0 = r_{w0} \cdot \omega_0, \quad v = -r_w \cdot \omega \quad \text{mit } v \cdot \cos(\beta_{zs}) = v_0 \cdot \cos(\beta_{zs0}) \text{ (siehe (5.1.6)a) weiter:}$$

$$(b) v \cdot \cos(\beta_{zs}) = -r_w \cdot \omega \cdot \cos(\beta_{zs}) = v_0 \cdot \cos(\beta_{zs0}) = r_{w0} \cdot \omega_0 \cdot \cos(\beta_{zs0})$$

$$(c) \ddot{U} = \omega / \omega_0 = -z_0 / z = -r_{w0} \cdot \cos(\beta_{zs0}) / (r_w \cdot \cos(\beta_{zs})) \quad (5.1.7)$$

Außerdem erhält man für die **Gleitgeschwindigkeit**:

$$\rightarrow \underline{v}_g = -r_{w0} \cdot \omega_0 \cdot \sin(\Sigma_w) / \cos(\beta_{zs}) = v_{g1} \cdot \omega_0 \text{ mit dem für die Paarung konstantem Faktor } v_{g1} = -r_{w0} \cdot \sin(\Sigma_w) / \cos(\beta_{zs}) \quad (5.1.8)$$

5.2 Ein Beispiel für ein Gegenrad

Wir bilden zum Beispiel (siehe Bilder 4.2.1 bis 4.2.3) ein Gegenrad, wobei der Normalschnitt der mitlaufenden (hier die Kontur erzeugende) Zahnstange ja schon in Bild 5.1.3 wiedergegeben ist. Wir wählen:

- $z_0 = 1$
- Schrägungswinkel $\beta_{w0} = 86,89056^\circ$ bzw. Steigungswinkel $\gamma_{w0} = 3,109444^\circ$
- Normalmodul $mn = 4.15 \text{ mm}$
- Teilkreisdurchmesser $= 76.507 \text{ mm}$
- Kopfkreisdurchmesser $= 81.187 \text{ mm}$

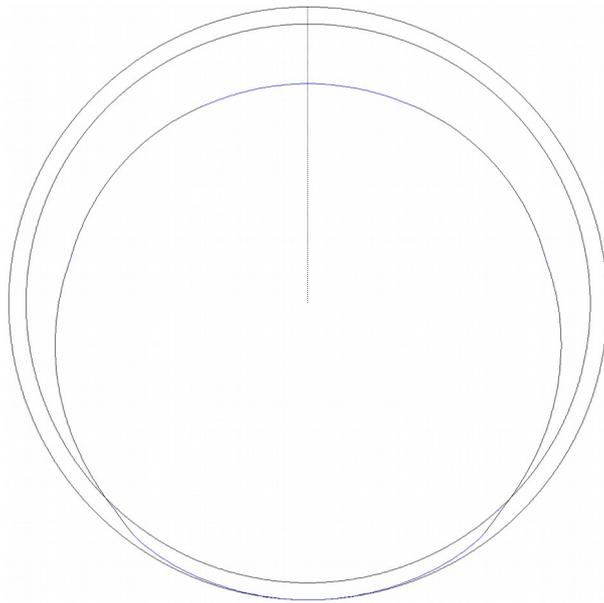


Bild 5.2.1 Stirnschnitt des Gegenrads mit $z_0 = 1$

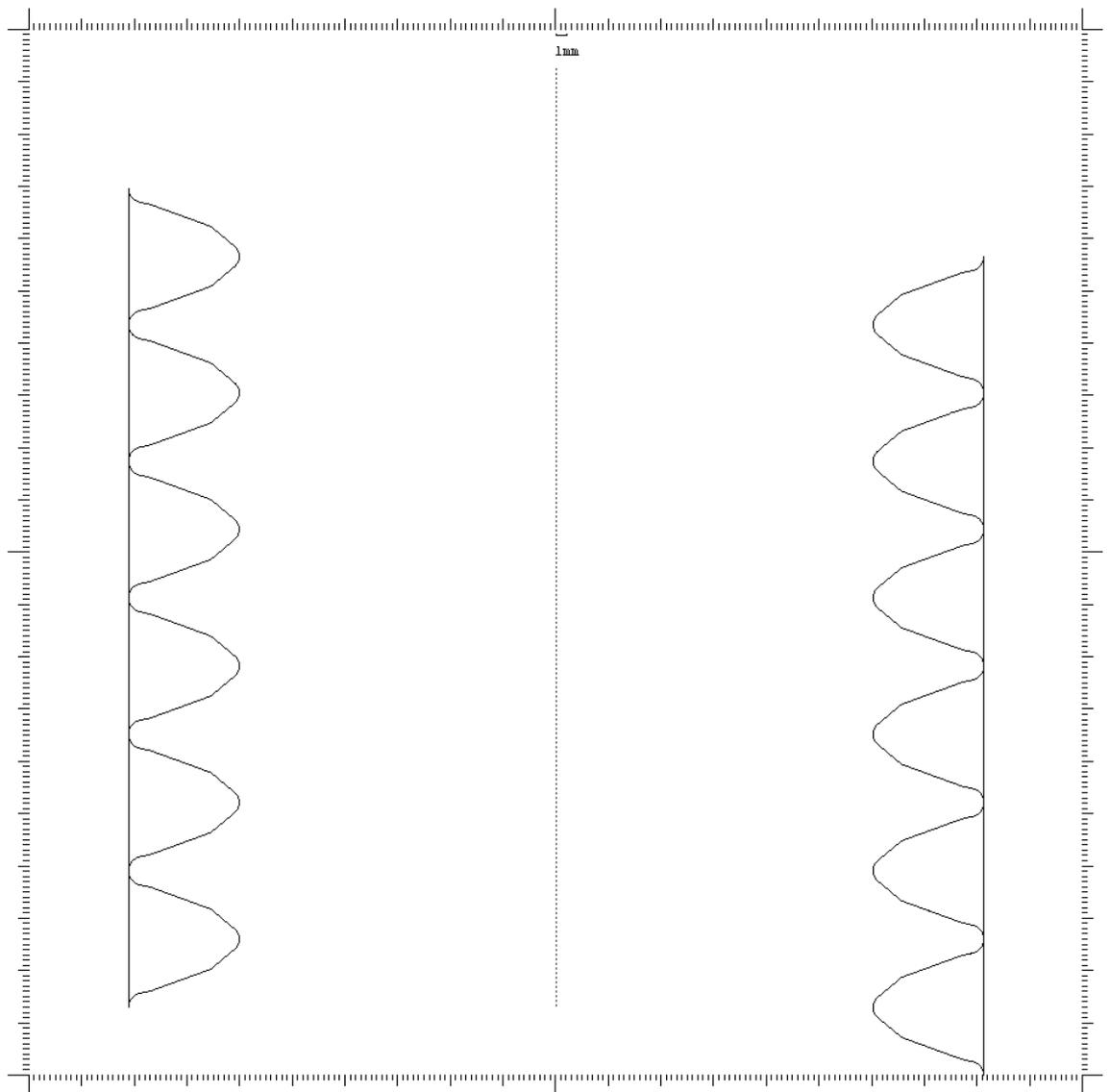


Bild 5.2.2 Axialschnitt der Schnecke Maßstab 10 Striche=5.0 mm

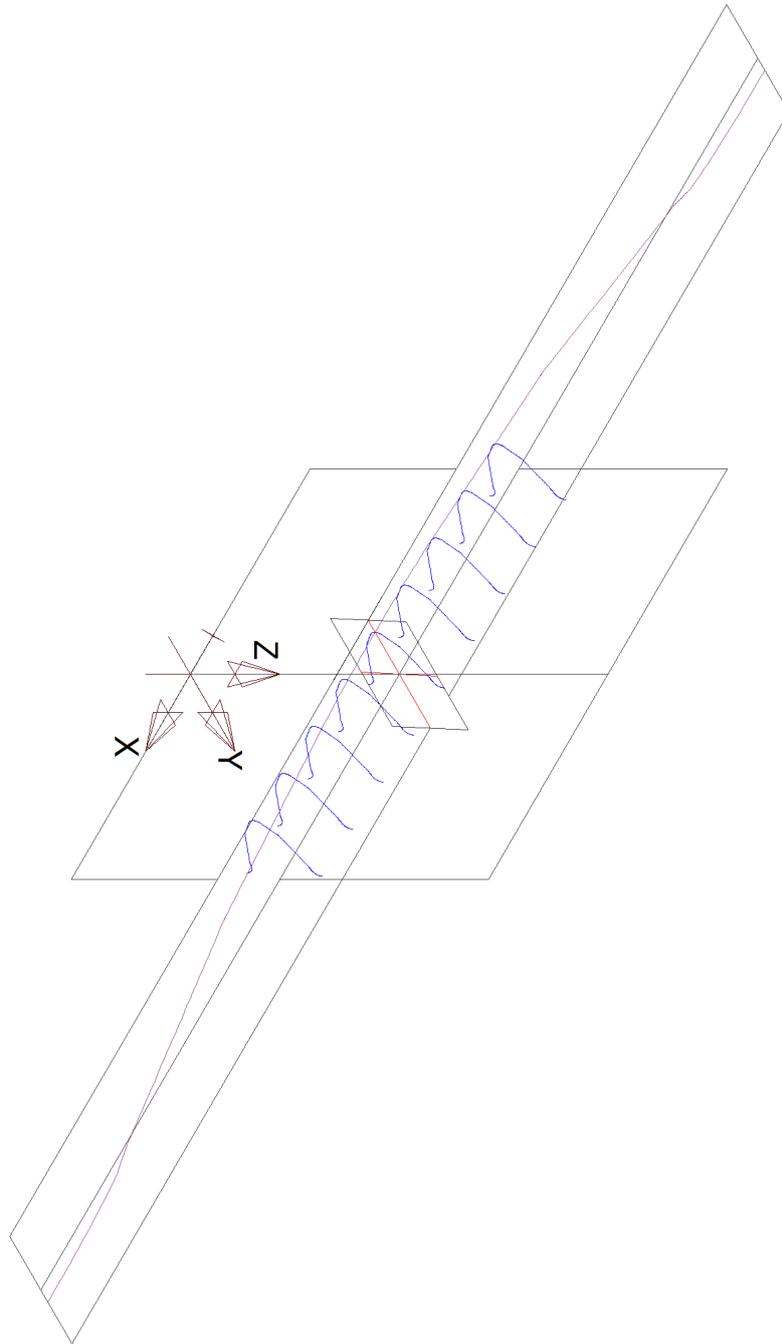


Bild 5.2.3 3D – Ansicht der Zahnstange ZS0 mit Wälzebene, Normalschnittebene und Stirnschnittebene

6 Anhang I: Der rechte Winkel, der Satz des Pythagoras und sin, cos

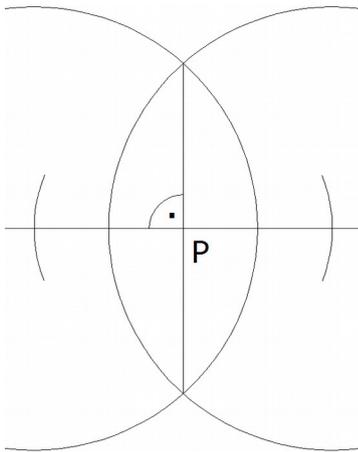


Bild A1.1 Konstruktion eines rechten Winkels mit Zirkel und Lineal. Dabei wird hier von einem Punkt P ausgegangen, der auf einer Geraden liegt. Ähnlich wird die Senkrechte von einem Punkt P auf eine Gerade mit Zirkel und Lineal konstruiert.

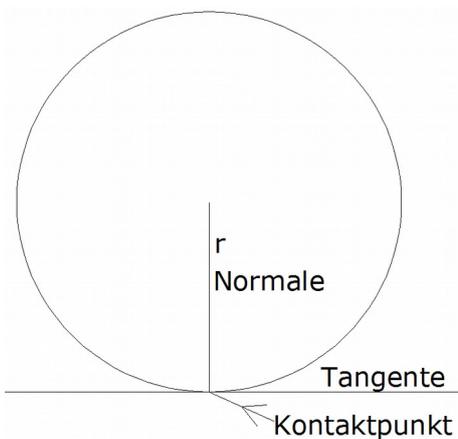


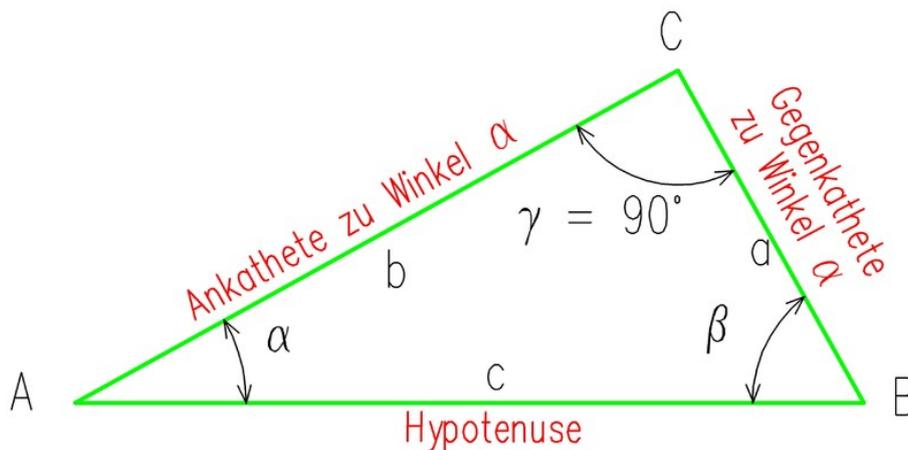
Bild A1.2 Normale, Tangente, Kontaktpunkt und Krümmungsradius r

Auf einem Kontaktpunkt (auch Berührungspunkt) berühren sich zwei Kurven, in Bild 3.2 handelt es sich um eine Gerade und einen Kreis. Die Gerade ist hier gleichzeitig Tangente an den Kreis im Kontaktpunkt und auch Tangente zu sich selbst im Kontaktpunkt. Die Tangente ist eine Gerade. Eng verwandt mit der Tangente ist der Tangentenvektor, den wir aber erst später einführen. Senkrecht zur Tangente im Kontaktpunkt ist die Normale, ebenfalls eine Gerade, die im vorliegenden Fall durch den Kontaktpunkt und den Kreismittelpunkt verläuft. Außerdem muss im Kontaktpunkt die Krümmung κ berechenbar sein. Für eine Gerade ist $\kappa = 0$ und für einen Kreis mit Radius r gilt: $\kappa = 1 / r$. Man kann für jede hinreichend glatte Kurve für einen beliebigen (Kontakt –) Punkt die Tangente, die

Normale und die Krümmung berechnen. Uns interessieren nun folgende drei Bewegungsarten in einem Kontaktpunkt:

- **Rollen**
- **Gleiten**
- Roll – Gleiten = **Wälzen**

Damit eine Roll – oder Gleit – oder Wälzbewegung in einem Kontaktpunkt stattfinden kann, müssen die Tangenten, und damit auch die Normalen, der beiden Kurven übereinstimmen. Für eine Rollbewegung muss zusätzlich die kinematischen Rollbedingung erfüllt sein, in unserem Fall: $|\Delta\varphi \cdot r| = |\Delta s|$.



Der Satz des Pythagoras ist einer der fundamentalen Sätze der euklidischen Geometrie. Er bezieht sich auf rechtwinklige Dreiecke und lautet: $c^2 = a^2 + b^2$

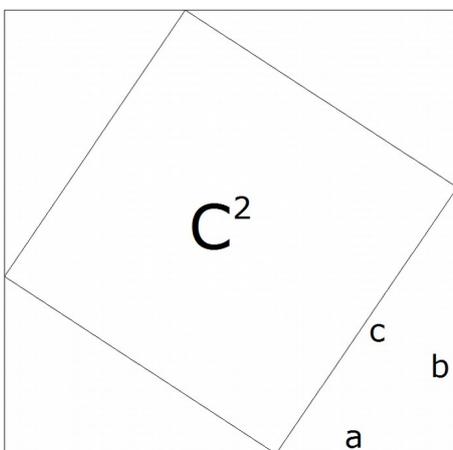


Bild A1.3 Zum Satz des Pythagoras

Einer der vielen Beweise des Satzes vom Pythagoras: Gemäß Bild 3.3 hat man für die Gesamtfläche $A = (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b$, also $a^2 + b^2 = c^2$

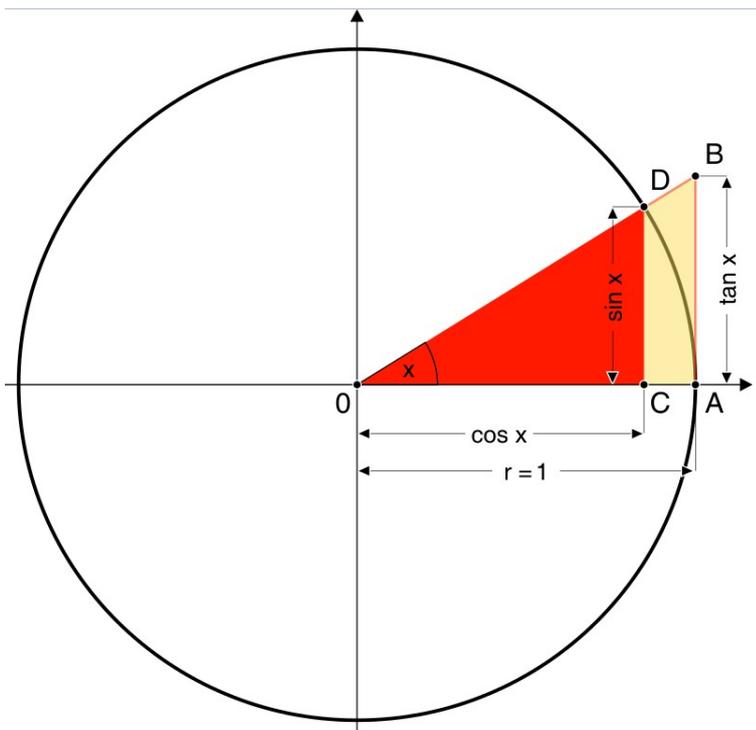


Bild A1.4 Sinusfunktion, Cosinusfunktion und Tangensfunktion am Einheitskreis

Mit dem Satz des Pythagoras und dem Strahlensatz erhält man sofort die Gleichungen:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und
- $\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$

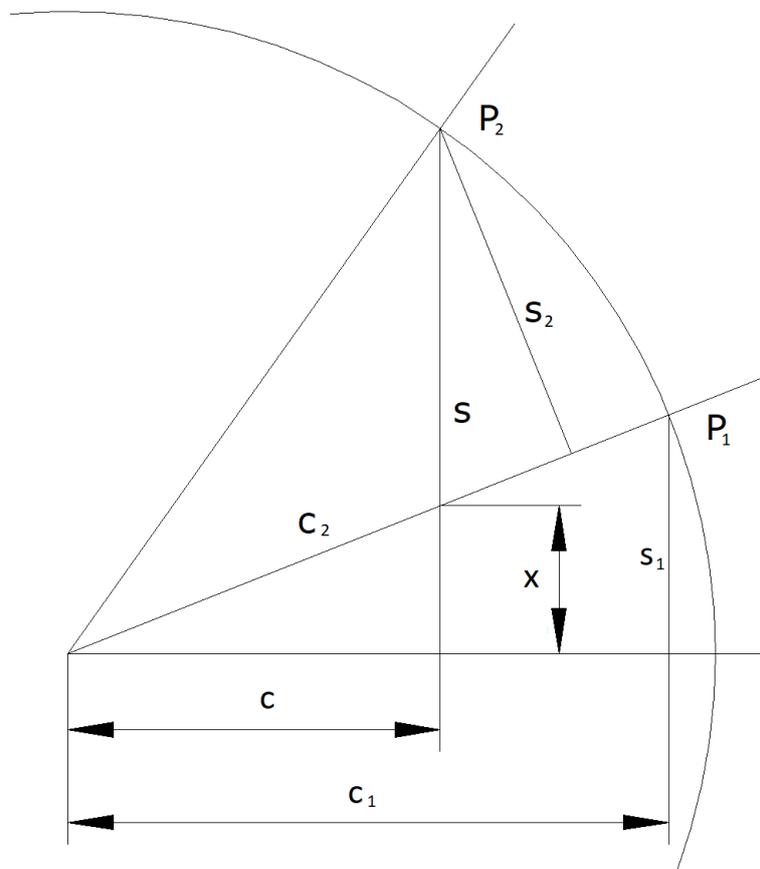


Bild A1.5 Drehung von P_1 nach P_2 im Kreis mit Radius $r = 1$

Man erhält: $c_1 / 1 = c / y$ und, da die Dreiecke mit den Seiten c, x, y und $s_2, c_2 - y, s - x$ zueinander ähnlich sind, $s_1 / c_1 = (c_2 - y) / s_2$. Damit folgt: $c = c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2$. Weiter gilt: $x / c = s_1 / c_1$ und $(s - x) / s_2 = 1 / c_1$; damit ergibt sich: $s = s_1 \cdot c_2 + s_2 \cdot c_1$. In Matrixschreibweise hat man die **Drehmatrizen**:

$$\begin{vmatrix} c & -s \\ s & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad (\text{A1} - 1)$$

Nun noch einige Worte zum **Bogenmaß**:

Das Bogenmaß eines Winkels α (aufgefasst als Zentriwinkel eines Kreises) ist definiert als das Verhältnis der Länge des Kreisbogens b zum Radius r : $\alpha = b / r$

Ist der Kreis ein Einheitskreis (Radius $r = 1$), so ist das Bogenmaß gleich der Länge des Kreisbogens b .

Das Bogenmaß ist das natürliche Winkelmaß. Bei Verwendung des Bogenmaßes wird die Hilfsmaßeinheit Radiant mit dem Einheitenzeichen „rad“ nachgestellt, die allerdings oft weggelassen wird. Der Vollwinkel, also der Umfang des Einheitskreises, hat das Bogenmaß $2 \cdot \pi$ rad. Per Definition entspricht 1° dem Bogenmaß $2 \cdot \pi / 360$ rad und dadurch ist das Gradmaß definiert. Man hat also:

$$1^\circ = 2 \cdot \pi / 360 \text{ rad}$$

$$90^\circ = \pi / 2 \text{ rad}$$

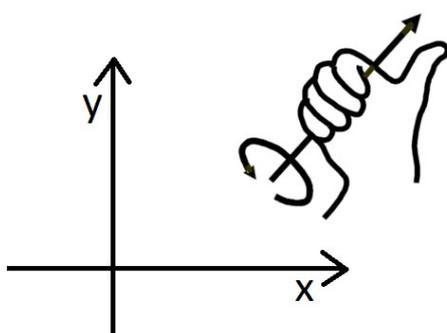
$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

$$270^\circ = 3 \cdot \pi / 2 \text{ rad}$$

$$360^\circ = 2 \cdot \pi \text{ rad}$$

Kartesischen Koordinatensystem, \mathbb{R}^2

In der Ebene haben wir es grundsätzlich mit 4 verschiedenen Objekten zu tun: mit Punkten, mit Verschiebungen, mit Drehungen und mit Spiegelungen. Die geometrisch anschauliche Darstellung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem: zwei Zahlengeraden, die senkrecht aufeinander stehen. Dabei ist üblicherweise die Anordnung



der Achsen gemäß nebenstehender Abbildung, also die x -Achse bzw. „Index 0 – Achse“ und senkrecht dazu die y -Achse bzw. „Index 1 – Achse“. Die positive Drehung wird gemäß der rechten – Handregel definiert, wobei der Daumen senkrecht nach oben bezogen auf das Koordinatensystem zeigt. Soweit die Anschauung.

Abstrakt erfolgen die Berechnungen im „ \mathbb{R}^2 – Vektorraum“, kurz \mathbb{R}^2 .

$\mathbb{R}^2 = \{ \underline{v} = (v_x, v_y)^t = (v_0, v_1)^t \mid v_0, v_1 \in \mathbb{R} \}$, wobei das hochgestellte t anzeigt, dass üblicherweise die Vektoren als Spalte geschrieben werden. Für zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ wird

das Skalarprodukt $\underline{v} \cdot \underline{w}$ definiert durch $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$ und die Länge bzw. der Betrag ergibt sich zu $|\underline{v}| = \sqrt{(\underline{v} \cdot \underline{v})}$. Zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ sind zueinander orthogonal genau dann, falls $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ gilt. Zu einem Vektor $\underline{v} = (v_1, v_2)^t$ ist ein dazu senkrechter Vektor \underline{v}^\perp gegeben durch $\underline{v}^\perp = (-v_2, v_1)^t$.

7 Anhang II: Der 3 – Dimensionale Raum, kartesische Koordinaten und Bewegungsablauf

7.1 Über Koordinatensysteme

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein Koordinatensystem, bei dem die Koordinatenachsen zueinander senkrecht (orthogonal) sind. In kartesischen Koordinatensystemen lassen sich auf natürliche Weise viele geometrische Sachverhalte anschaulich und übersichtlich beschreiben.

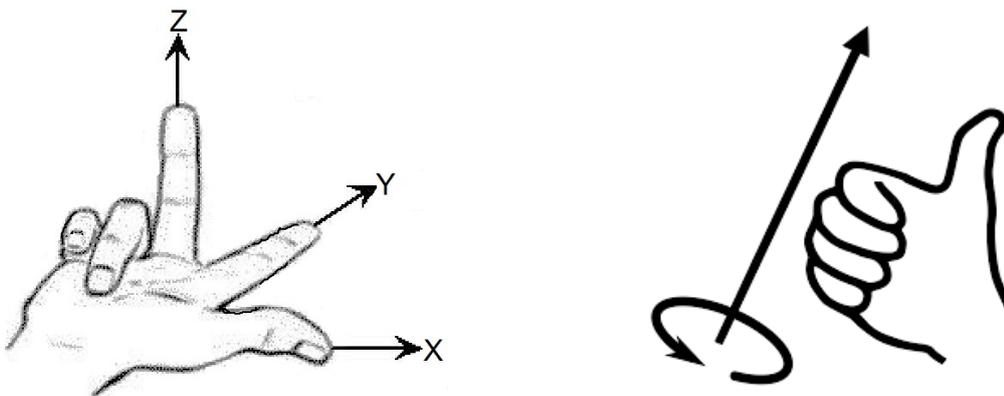


Bild All.1.1: Kartesisches Koordinatensystem als Rechtssystem bzw. rechtshändiges System, in dem für eine Achsrichtung die positive Drehrichtung gemäß Bild definiert ist! Man spricht von positiver Orientierung. Dies ist soweit die Anschauung in der Realität

Als **globales Koordinatensystem des globalen Raums**, das vom (Zeit –) Parameter t unabhängig ist, verwenden wir hier das übliche rechtshändige, kartesische Koordinatensystem mit der Basis (jetzt wird es abstrakt, d.h. wir konstruieren ein mathematisches Modell, mit dem die Realität perfekt beschreibbar ist):

- Standardbasis $B = \{\underline{e}_x = \underline{e}_0 = (1,0,0)^t, \underline{e}_y = \underline{e}_1 = (0,1,0)^t, \underline{e}_z = \underline{e}_2 = (0,0,1)^t\}$
- Und dem Ursprung $P_{\text{Urspr}B} = (0, 0, 0)^t$ (All.1.0)

Das mathematische Modell bezieht sich auf den \mathbb{R}^3 ; damit haben wir für $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$:

$\underline{v} = v_0 \cdot \underline{e}_0 + v_1 \cdot \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2 = (v_0, v_1, v_2)^t = (v_x, v_y, v_z)^t = (\underline{v})$. Das hochgestellte t bedeutet: Transponiert; wir haben es also formal mit einer Matrix mit 3 Zeilen und einer Spalte zu tun, wobei sich (\underline{v}) eben auf die Standardbasis B bezieht.

Es gelten folgende Definitionen und Zusammenhänge:

- a) **Skalarprodukt** $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_0 \cdot w_0 + v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$
- b) Zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$ heißen **orthogonal**, falls $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$ gilt
- c) **Betrag** eines Vektors: $|\underline{v}| = \sqrt{(\underline{v} \cdot \underline{v})}$

- d) $|\underline{v} \cdot \underline{w}| \leq |\underline{v}| \cdot |\underline{w}|$
- e) **Vektorprodukt** (Kreuzprodukt, äußeres Produkt) von zwei Vektoren $\underline{v}, \underline{w}$: $\underline{v} \times \underline{w} = (v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1, -v_0 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_0, v_0 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_0)^t$
- f) $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{w} = 0$ und $(\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0$
- g) $(\underline{u}_0 \times \underline{u}_1) \cdot \underline{u}_2 = \underline{u}_0 \cdot (\underline{u}_1 \times \underline{u}_2)$
- h) **Grassmann – Identität:** $\underline{v} \times (\underline{w} \times \underline{u}) = (\underline{v} \cdot \underline{u}) \cdot \underline{w} - (\underline{v} \cdot \underline{w}) \cdot \underline{u}$
- i) $(\underline{v} \cdot \underline{w})^2 + (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = |\underline{v}|^2 \cdot |\underline{w}|^2$ (All.1.1)

Determinante, Orientierung und Winkel zwischen 2 Vektoren

Es seien drei Vektoren $(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ in dieser Reihenfolge gegeben. Dann wird die **Determinantenfunktion det()** definiert durch: $\det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2) = (\underline{u}_0 \times \underline{u}_1) \cdot \underline{u}_2$. Es gilt:

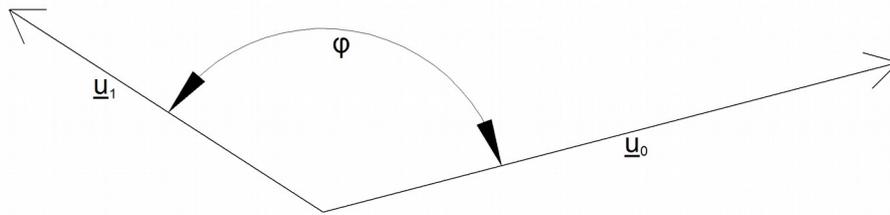
- a) $\det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2) = \det(\underline{u}_2, \underline{u}_0, \underline{u}_1) = \det(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_0) = -\det(\underline{u}_0, \underline{u}_2, \underline{u}_1) = -\det(\underline{u}_2, \underline{u}_1, \underline{u}_0) = -\det(\underline{u}_1, \underline{u}_0, \underline{u}_2)$
- b) $\det(\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$
- c) Gilt $\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1 \neq 0$, so folgt: $\det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_0 \times \underline{u}_1) > 0$
- d) Aus $\det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2) \neq 0$ folgt: $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2$ sind linear unabhängig (All.1.2)

Definition: Gilt $\det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2) > 0$, so nennt man die Vektoren $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2$ **positiv orientiert**. Insbesondere ist die Basis $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2$ positiv orientiert. (All.1.3)

Definition: Bildet man eine 3×3 – Matrix U , indem man die drei Spalten als Vektoren auffasst, also: $U = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$, so wird definiert: $\det(U) = \det(\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ (All.1.4)

Seien U, V zwei 3×3 – Matrizen, so gilt:

- a) $\det(U \cdot V) = \det(U) \cdot \det(V)$
- b) $\det(U) = \det(U^t)$
- c) $\det(a \cdot U) = a^n \cdot \det(U)$ für jede Zahl a
- d) $\det(U^{-1}) = 1 / \det(U)$ falls U invertierbar (All.1.5)



Man kann zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren \underline{u}_0 , \underline{u}_1 einen Winkel φ messen. Wegen (2.1.1)c) gilt:

$$-1 \leq \cos(\varphi) = \underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1 / (|\underline{u}_0| \cdot |\underline{u}_1|) \leq 1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{All.1.6})$$

Berechnet wird also der cos und die Festlegung $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist sinnvoll, da es sich ja nicht um eine Drehung handelt. Mit (2.1.6) und (2.1.1) erhält man:

$$0 \leq \sin(\varphi) = |\underline{u}_0 \times \underline{u}_1| / (|\underline{u}_0| \cdot |\underline{u}_1|) \leq 1 \quad (\text{All.1.7})$$

7.2 Drehung, Drehmatrix, Spiegelung

Man betrachte eine allgemeine Achsrichtung, die durch einen Einheitsvektor \underline{n} (also $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$) gegeben sei und um diese Achse soll um den Winkel α gedreht werden. Dann ist die **Drehung**, und damit auch die **Drehmatrix** $D_n(\alpha)$, gegeben durch:

$$D_n(\alpha) \cdot \underline{v} = \underline{v} + \sin(\alpha) \cdot (\underline{n} \times \underline{v}) + (1 - \cos(\alpha)) \cdot \underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{v})$$

Eine Umformung mit Hilfe der Grassmann – Identität ergibt:

$$D_n(\alpha) \cdot \underline{v} = \cos(\alpha) \cdot \underline{v} + \sin(\alpha) \cdot (\underline{n} \times \underline{v}) + (1 - \cos(\alpha)) \cdot (\underline{n} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{n} \quad (\text{All.2.8})$$

Es gilt:

- a) $D_n(\alpha + 2 \cdot \pi) = D_n(\alpha)$
- b) $D_n(\alpha) \cdot D_n(\beta) = D_n(\alpha + \beta)$
- c) $[D_n(\alpha)]^t = D_n(-\alpha)$, also: $[D_n(\alpha)]^t \cdot D_n(\alpha) = E$ (E = Einheitsmatrix)
- d) $\det(D_n(\alpha)) = 1 > 0$ (All.2 .9)

Für die Achsrichtung $(0, 0, 1)^t$ erhält man:

$$D_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{All.2 .10})$$

Besonders wichtig ist $\det(D_n(\alpha)) = 1$, also (All.2 .9)d)! In der Realität bedeutet dies, dass eine Drehung tatsächlich als Bewegung durchgeführt werden kann. Dies gilt nicht für eine Spiegelung!

Mit einem Einheitsvektor \underline{n} (also $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$) wird eine **Spiegelung** S_n definiert durch:

$S_n = E - 2 \cdot \underline{n} \cdot \underline{n}^t$; es gilt:

(a) $\det(S_n) = -1$

(b) $S_n = S_n^t$

(c) Sei \underline{n}^+ ein zusätzlicher Einheitsvektor, so ist $S_n \cdot S_{n^+}$ eine Drehmatrix

7.3 Starrer Bewegungsablauf

Es existiere ein globaler Parameter t , der oft als Zeitparameter oder als Drehwinkel interpretiert werden kann. Weiter haben wir das globale Koordinatensystem (All.1.0), in dem alle (Starr –) Körper definiert werden, z.B. also die erzeugende Zahnstange und der Wälzkörper. Eine **starre Bewegung** B_s , die orientierungstreu ist, wird definiert durch:

$B_s(\underline{x}, t) = D_{n(t)}(\alpha(t)) \cdot \underline{x} + \underline{w}(t)$ mit der Achsrichtung $\underline{n}(t)$ (also $\underline{n}(t) \cdot \underline{n}(t) = 1$), dem Winkel $\alpha(t)$ und dem Vektor $\underline{w}(t)$ für die Translation. Es gilt also:

(a) $|\underline{x} - \underline{y}| = |B_s(\underline{x}, t) - B_s(\underline{y}, t)|$

(b) $\det(D_{n(t)}(\alpha(t)) \cdot \underline{e}_0, D_{n(t)}(\alpha(t)) \cdot \underline{e}_1, D_{n(t)}(\alpha(t)) \cdot \underline{e}_2) = 1$ (All.3.1)

7.4 Koordinatentransformation

Gegeben sei die positiv orientierte orthonormale Basis $B_U = \{ \underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2 = \underline{u}_0 \times \underline{u}_1 \}$ mit $\|\underline{u}_0\| = 1$ und $\|\underline{u}_1\| = 1$ und $\underline{u}_0 \cdot \underline{u}_1 = 0$. Dann gilt: für $U = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$: $\det(U) = +1$, also ist die so gewählte Basis positiv orientiert. Für $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ sind nun die Koordinaten bezüglich der Basis B_U zu bestimmen: $\underline{v} = v_0^U \cdot \underline{u}_0 + v_1^U \cdot \underline{u}_1 + v_2^U \cdot \underline{u}_2 = (v_0^U, v_1^U, v_2^U)^t_U = (\underline{v})_U$. Mit der Transformationsmatrizen $T_{BU} = U^t$ und $T_{UB} = U$ ergibt sich:

➤ $(\underline{v})_U = T_{BU} \cdot (\underline{v})$ und $(\underline{v}) = T_{UB} \cdot (\underline{v})_U$

➤ $T_{BU} \cdot T_{UB} = E = U^t \cdot U$ (All.4.1)

Also: (\underline{v}) sind die Koordinaten bezogen auf Standardbasis als 3×1 – Matrix und $(\underline{v})_U$ bezogen auf Basis U .

Bei Ortsvektoren (also Punkten) muss der Ortsvektor vom Ursprung des globalen Koordinatensystems zum Ursprung des B_U – Koordinatensystems berücksichtigt werden.

Eine besondere Bedeutung hat die Drehung $D_n(\alpha)$ eines Starrkörpers im globalen Koordinatensystem um eine feste Achsrichtung \underline{n} (mit $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$), wobei beim Start $\alpha = 0$ gelte. Die bezogen auf den Starrkörper feste positiv orientierte orthonormale Basis sei gegeben durch $B_U = \{ \underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2 = \underline{u}_0 \times \underline{u}_1 \}$, wobei gelte:

➤ für $\alpha = 0$ ist $\underline{u}_0 = \underline{e}_0, \underline{u}_1 = \underline{e}_1, \underline{u}_2 = \underline{e}_2$

➤ der Ursprung des Starrkörper – Koordinatensystem und der Ursprung des globalen Koordinatensystem sind immer identisch.

Man erhält: $D_n(\alpha) = U = ((\underline{u}_0), (\underline{u}_1), (\underline{u}_2))$ mit $\det(U)=+1$ und die Transformationsmatrizen, siehe oben. Für $\underline{n} = \underline{e}_2$ ergibt sich z.B.:

$$\triangleright (\underline{u}_0) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)^t, (\underline{u}_1) = (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)^t, (\underline{u}_2) = (0, 0, 1) \quad (\text{All.4.2})$$

Ein weiterer Spezialfall besteht darin, dass $B_U = B$ gilt, sich aber der Ortsvektor \underline{r} vom Ursprung des globalen Koordinatensystems zum Ursprung des B_U – Koordinatensystems ändert. Dann gilt: Die Koordinaten von Verschiebungen oder Richtungen sind in beiden Koordinatensystemen gleich, für einen Ortsvektor \underline{P} (Punkt) gilt aber:

$$(\underline{P})^t_U = (\underline{P})^t - \underline{r}$$